

## Aufgaben zu Kapitel 11 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

### Aufgabe 11.1

Zeigen Sie, dass die Anzahl der perfekten Matchings eines bipartiten Graphen „sehr eng“ mit der Berechnung der Permanente einer Booleschen Matrix zusammenhängt.

Hinweis: Wenn der Graph  $n = 2k$  Knoten hat, dann betrachtet man eine Matrix der Größe  $k \times k$ .

### Lösung 11.1

Es sei  $(V, E)$  ein bipartiter Graph und  $T = \{t_1, \dots, t_y\}$  und  $U = \{u_1, \dots, u_y\}$  seien zwei disjunkte Knotenteilmengen mit der Eigenschaft, dass jede Kante einen Knoten aus  $T$  mit einem Knoten aus  $U$  verbindet.

Es sei  $B$  die Matrix mit Einträgen

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls eine Kante zwischen } t_i \text{ und } u_j \text{ existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$B$  heißt gelegentlich die Biadjazenzmatrix des bipartiten Graphen.

Wenn der Graph überhaupt ein perfektes Matching besitzt, dann ist jeder Knoten in  $T$  oder  $U$  und offensichtlich ist  $|T| = |U| = n/2 = k$ , d. h.  $B$  ist eine quadratische Matrix.

Es bezeichne  $S_n$  die symmetrische Gruppe mit  $n$  Elementen. Die Permanente von  $B$  ist

$$\sum_{\sigma \in S_k} \prod_{i=1}^n b_{i\sigma(i)}$$

Wenn für ein  $\sigma$  der Summand  $\prod_{i=1}^n b_{i\sigma(i)} = 1$  ist, dann bedeutet das, dass es für jedes  $i$  eine Kante von  $t_i$  nach  $u_{\sigma(i)}$  gibt. Da  $\sigma$  eine Bijektion ist, bildet die entsprechende Kantenmenge offensichtlich ein perfektes Matching  $M_\sigma$ . Und verschiedene Permutationen legen verschiedene perfekte Matchings fest.

Umgekehrt legt jedes perfekte Matching auch eine Permutation  $\sigma$  fest, für die  $\prod_{i=1}^n b_{i\sigma(i)} = 1$ . Und verschiedene perfekte Matchings induzieren verschiedene Permutationen.

Also ist die Anzahl perfekter Matchings des Graphen gerade die Permanente von  $B$ .