Aufgaben zu Kapitel 10 der Vorlesung
„Randomisierte Algorithmen“

Aufgabe 10.1
Für zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ über einer Menge S haben wir die totale Variationsdistanz so definiert:

$$\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|_{tv} = \frac{1}{2}\sum_{j\in S} |\mathbf{p}_j - \mathbf{q}_j| \ .$$

Man zeige:

$$\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|_{tv} = \max_{T\subseteq S} |\mathbf{p}(T) - \mathbf{q}(T)|$$

wobei $\mathbf{p}(T)$ definiert ist als $\mathbf{p}(T) = \sum_{j\in T} \mathbf{p}_j$.

Lösung 10.1
Es sei $X = \{j \mid \mathbf{p}_j \leq \mathbf{q}_j\}$ und $Y = \{j \mid \mathbf{p}_j > \mathbf{q}_j\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{j\in Y} \mathbf{p}_j - \mathbf{q}_j &= 1 - \sum_{j\in Y} \mathbf{q}_j - \sum_{j\in X} \mathbf{p}_j \\ &= \sum_{j\in X} \mathbf{q}_j - \sum_{j\in X} \mathbf{p}_j \\ &= \sum_{j\in X} \mathbf{q}_j - \mathbf{p}_j\end{aligned}$$

Und es ist

$$\begin{aligned}\|p-q\|_{tv} &= \frac{1}{2}\sum_{j\in S} |\mathbf{p}_j - \mathbf{q}_j| \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j\in X} \mathbf{q}_j - \mathbf{p}_j + \frac{1}{2}\sum_{j\in Y} \mathbf{p}_j - \mathbf{q}_j\end{aligned}$$

also nach dem vorangegangenen

$$\|p-q\|_{tv} = \sum_{j\in X} \mathbf{q}_j - \mathbf{p}_j = \sum_{j\in Y} \mathbf{p}_j - \mathbf{q}_j$$

Nun wird $|\mathbf{p}(T) - \mathbf{q}(T)| = |\sum_{j \in T} \mathbf{p}_j - \mathbf{q}_j|$ natürlich genau dann groß, wenn T eine Teilmenge ist, auf der für alle $j \in T$ immer $\mathbf{p}_j > \mathbf{q}_j$ (oder umgekehrt) ist. Also wird der Ausdruck für $T = X$ und $T = Y$ maximal.

Aufgabe 10.2
Die Variationsdistanz einer Markov-Kette war definiert als

$$\Delta(t) = \max_{\mathbf{p}} \|\mathbf{p}P^t - \mathbf{w}\|_{tv}$$

Zeigen Sie, dass das Maximum für einen Einheitsvektor $\mathbf{p} = \mathbf{e}_i$ angemommen wird:

$$\Delta(t) = \max_i \|\mathbf{e}_i P^t - \mathbf{w}\|_{tv} = \max_i \|P_i^t - \mathbf{w}\|_{tv}$$

Lösung 10.2
Es seien $\mathbf{m}$ und $\mathbf{q}$ zwei Zeilen von P^t, wobei außerdem $\mathbf{m}$ eine Zeile von P^t sei, für die $\|\mathbf{m} - \mathbf{w}\|_{tv}$ maximiert wird.

Wir zeigen für $0 \leq \alpha \leq 1$ und $\beta = 1 - \alpha$:

$$\|\alpha\mathbf{m} + \beta\mathbf{q} - \mathbf{w}\|_{tv} \leq \|\mathbf{m} - \mathbf{w}\|_{tv}$$

Das geht so:

$$\begin{aligned}
\|(\alpha\mathbf{m} + \beta\mathbf{q}) - \mathbf{w}\|_{tv} &= \|(\alpha\mathbf{m} + \beta\mathbf{q}) - (\alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{w})\|_{tv} \\
&= \|\alpha(\mathbf{m} - \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{q} - \mathbf{w})\|_{tv} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\alpha(\mathbf{m}_i - \mathbf{w}_i) + \beta(\mathbf{q}_i - \mathbf{w}_i)| \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\alpha(\mathbf{m}_i - \mathbf{w}_i)| + |\beta(\mathbf{q}_i - \mathbf{w}_i)| \\
&= \alpha\|\mathbf{m} - \mathbf{w}\|_{tv} + \beta\|\mathbf{q} - \mathbf{w}\|_{tv} \\
&\leq \alpha\|\mathbf{m} - \mathbf{w}\|_{tv} + \beta\|\mathbf{m} - \mathbf{w}\|_{tv} \\
&= (\alpha + \beta)\|\mathbf{m} - \mathbf{w}\|_{tv} \\
&= \|\mathbf{m} - \mathbf{w}\|_{tv}
\end{aligned}$$

Die analoge Argumentation funktioniert, wenn man statt einer Zeile $\mathbf{q}$ von P^t mehrere Zeilen nutzt.