Aufgaben zu Kapitel 9 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen"

Aufgabe 9.1
Wie in der Vorlesung sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph und $0 < \beta \leq 1$ eine reelle Zahl. Mit $d(i)$ bezeichnen wir den Grad von Knoten i und es sei $d = \max_{i \in V} d(i)$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten P_{ij} der Markov-Kette $M_{G,\beta}$ seien wie folgt definiert:

$$P_{ij} = \begin{cases} \beta/d & \text{falls } i \neq j \text{ und } (i,j) \in E \\ 1 - d(i)\beta/d & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man beweise:

1. Die Gleichverteilung ist die stationäre Verteilung von $M_{G,\beta}$.
2. Für $\beta < 1$ ist $M_{G,\beta}$ aperiodisch.
3. Für $\beta < 1$ ist $M_{G,\beta}$ reversibel.

Lösung 9.1

1. Da die Kette irreduzibel ist, hat sie genau eine stationäre Verteilung. Es genügt die Rechung, dass die Gleichverteilung $\mathbf{p}_i = 1/|V|$ eine stationäre Verteilung ist:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}P)_j &= \sum_i \mathbf{p}_i P_{ij} \\ &= \mathbf{p}_j P_{jj} + \sum_{j \neq i, (i,j) \in E} \mathbf{p}_i P_{ij} \\ &= 1/|V| \cdot (1 - d(j)\beta/d) + 1/|V| \sum_{j \neq i, (j,i) \in E} \beta/d \\ &= 1/|V| \cdot (1 - d(j)\beta/d) + 1/|V| \cdot d(j) \cdot \beta/d \\ &= 1/|V| = \mathbf{p}_j \end{aligned}$$

2. Für $\beta < 1$ ist offensichtlich für *jeden* Knoten $P_{ii} = 1 - d(i)\beta/d > 0$.

3. Nachrechnen:

   - Ist $i \neq j$ und $(i, j) \in E$, dann ist $\mathbf{p}_i P_{ij} = 1/|V| \cdot \beta/d = \mathbf{p}_j P_{ji}$.
   - Die Fälle $(i, j) \notin E$ und $i = j$ sind noch einfacher.

Aufgabe 9.2
Zeigen Sie, dass die Markov-Kette des Metropolis-Algorithmus (Punkt 9.8 der Vorlesung) reversibel ist.

Lösung 9.2
Man rechnet

$$\frac{e^{-H(i)}/Z \cdot P_{ij}}{e^{-H(j)}/Z \cdot P_{ji}} = e^{H(j)-H(i)} \frac{P_{ij}}{P_{ji}}$$

$$= e^{H(j)-H(i)} \cdot \begin{cases} Q_{ij}/\left(Q_{ji} e^{H(j)-H(i)}\right) & \text{falls } H(j) \leq H(i) \\ Q_{ij} e^{H(i)-H(j)}/Q_{ji} & \text{falls } H(j) > H(i_t) \end{cases}$$

was sich wegen der Symmetrie von Q sofort vereinfacht zu

$$= 1$$