Aufgaben zu Kapitel 8 der Vorlesung
„Randomisierte Algorithmen“

Aufgabe 8.1

a) Beweisen Sie Lemma 8.14 der Vorlesung: Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge natürlicher Zahlen mit den Eigenschaften, dass

$$M + M = \{k + \ell \mid k, \ell \in M\} \subseteq M \qquad \text{und} \qquad \gcd M = 1 \ .$$

Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\{k_0\} + \mathbb{N}_0 = \{k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots\} \subseteq M$$

b) Wie lautet wohl die Verallgemeinerung dieser Aussage für den Fall, dass $\gcd M \neq 1$ ist?

Lösung 8.1

Wenn $\gcd M = 1$ ist, dann gibt es nach dem verallgemeinerten Euklidischen Algorithmus endlich viele ganze Zahlen $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{Z}$ und Zahlen $a_1, \dots, a_r \in M$ mit

$$1 = \sum_{i=1}^{r} z_i a_i$$

Es sei $A = \max_i a_i$ und

$$N = \sum_{i=1}^{r} A|z_i|a_i$$

Dann ist für $j \in \{0, 1, \dots, A-1\}$

$$\begin{aligned} N + j &= \sum_{i=1}^{r} A|z_i|a_i + j \sum_{i=1}^{r} z_i a_i \\ &= \sum_{i=1}^{r} \underbrace{(A|z_i| + jz_i)}_{\geq 0} a_i \\ &\in M \end{aligned}$$

Außerdem ist für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $N + nA \in M$, womit die Behauptung folgt.

Aufgabe 8.2
Zeigen Sie: Wenn eine Markov-Kette mit Matrix $\mathbf{P}$ ergodisch ist, dann gibt es ein $k > 0$, so dass in $\mathbf{P}^k$ alle Einträge echt positiv sind.

Lösung 8.2
Für jeden Zustand x gibt es ein k_x mit $P_{xx}^{k_x} > 0$ und $\{k_x\} + \mathbb{N}_0 \subseteq M$.

Sei $k_0 = \max\{k_x\}$.

Bezeichne $d(x,y)$ die Länge kürzester Pfade von x nach y. Sei $d = \max\{d(x,y)\}$ der Durchmesser des der Markovkette zu Grunde liegenden Graphen.

Dann kommt man in $k = k_0 + d$ Schritten von jedem x zu jedem y. Denn: $k_0 + d = (k_0 + d - d(x,y)) + d(x,y)$.

Aufgabe 8.3
Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen und es sei $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ die Folge mit $s_k = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} x_i$.

Zeigen Sie: Wenn der Grenzwert $g = \lim_{n\to\infty} x_n$ existiert, dann exisitiert auch der Cesàro-Grenzwert $c = \lim_{k\to\infty} s_k$ und es ist $g = c$.

Lösung 8.3
Man zeigt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ exisitiert so, dass für alle $n \geq k_0$ gilt: $|s_k - g| \leq \varepsilon$. Es ist

$$s_k - g = \sum_{i=0}^{k} \frac{x_i - g}{k+1}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für alle n größer gleich einem $n_0 > 0$, dass $|x_i - g| < \varepsilon/2$ ist. Also ist auch

$$\left| \frac{\sum_{i=n_0}^{n} x_i - g}{n} \right| \leq \frac{\sum_{i=n_0}^{n} |x_i - g|}{n} < \frac{(n-n_0)\varepsilon/2}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei $z_n = \sum_{i=0}^{n_0-1}(x_i - g)/n$. Dann gilt für alle n größer gleich einem $n_1 > 0$, dass $|z_n| < \varepsilon/2$.

Also ist für n größer gleich dem $k_0 = \max(n_0, n_1)$

$$\left| \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i - g}{n+1} \right| \leq |z_n| + \left| \frac{\sum_{i=n_0}^{n} x_i - g}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Aufgabe 8.4

Auf einem ansonsten leeren Schachbrett startet ein Springer in einer Ecke und macht in jedem Schritt zufällig gleichverteilt einen der jeweils legalen Schachzüge.

- Modellieren Sie das Ganze als Random Walk in einem Graphen.
- Ist der Graph zusammenhängend?
- Wieviele Kanten hat der Graph?
- Was ist der Erwartungswert für die Anzahl Schritte, bis der Springer zum ersten Mal wieder auf dem Startfeld ist?

Lösung 8.4

- Knoten des Graphen sind die Felder des Schachbretts. Eine Kante verbindet zwei Felder x und y, falls der Springer in *einem* Zug von x nach y gelangen kann.
- Ja: Kurzes Ausprobieren zeigt, dass ein Springer von einer Ecke aus jedes der Felder in dem zugehörigen Viertel des Schachbrettes erreichen kann.
- Nach Satz 8.29 der Vorlesung ist der gesuchte Wert der Kehrwert des Wertes der stationären Verteilung für die Eckfelder. Nach Lemma 8.22 ist letzterer Wert gerade $d(v)/2m$.

  Der Grad der Eckknoten ist 2. Die Gesamtzahl der Kanten ist 168 (siehe Abb. 1). Folglich ist $168 = 2/(2 \cdot 168)$ auch der gesuchte Erwartungswert.

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

Abbildung 1: Anzahl möglicher Springerzüge von jedem Feld aus