Aufgaben zu Kapitel 6 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

Aufgabe 6.1
Es sei die Abkürzung

$$A(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

definiert. Zeigen Sie: Für $x \geq 1$ ist $A(x)$ ist monoton wachsend und

$$\lim_{x\to\infty} A(x) = \frac{1}{e}$$

Lösung 6.1
Es sei $x \geq 1$. Wir schreiben zunächst $A(x) = e^{x \ln(1-1/x)} = e^{B(x)}$ und sehen uns $B(x) = \ln A(x)$ an.

$$\begin{aligned}
B(x) &= x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = x \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) \\
B'(x) &= \ln(1 - \frac{1}{x}) + x \frac{x}{x-1} \frac{1}{x^2} \\
&= \ln(1 - \frac{1}{x}) + \frac{1}{x-1} \\
B''(x) &= \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} \\
&= \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

Für $x > 1$ ist $B''(x) < 0$ also ist $B'(x)$ monoton fallend. Für $x \to \infty$ geht $B'(x) \to 0$, also ist $B'(x)$ positiv. Also wächst $B(x)$ monoton für $x \geq 1$. Da e^x eine monoton wachsende Funktion ist, ist mit $B(x)$ folglich auch $A(x)$ monoton wachsend.

Außerdem ergibt sich mit Hilfe der l'Hospitalschen Regeln

$$\lim_{x\to\infty} B(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x-1} \cdot \frac{x \cdot 1 - 1 \cdot (x-1)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{x}{x-1} = -1$$

Also ist $\lim_{x\to\infty} A(x) = e^{-1}$.

Aufgabe 6.2

Für einen Graphen G sei wie in der Vorlesung $L(G)$ die Menge der lokal minimalen Kanten und $B(G)$ der Graph, der nach einer Borůvka-Phase aus G entsteht. Zeigen Sie im Detail, dass die Kanten aus $L(G)$ und die Kanten eines MST von $B(G)$ zusammen einen MST von G bilden.

Gehen Sie davon aus, dass alle Kantengewichte paarweise verschieden voneinander sind.

Lösung 6.2

(Dies ist der Text aus dem Skript mit Erweiterungen. Man könnte hier und da noch pingeliger argumentieren, aber das muss hoffentlich nicht sein.)

(i) Jeder aufspannende Baum T von G (gleichgültig, ob minimal oder nicht), der alle Kanten aus $L(G)$ enthält, induziert einen aufspannenden Baum T' von $B(G)$ mit $w(T') = w(T) - w(L(G))$, indem man aus T die Kanten entfernt, die in $L(G)$ liegen.

Man muss sich überlegen, dass T' zusammenhängend und zyklenfrei ist. Es sollte klar sein, dass andernfalls schon T die erste bzw. zweite Eigenschaft auch nicht gehabt hat.

(ii) Umgekehrt gilt auch, dass jeder aufspannde Baum T' von $B(G)$ einen aufspannenden Baum $\bar{T}'$ von G induziert mit $w(T) = w(T') + w(L(G))$, indem man zu T' die Kanten aus $L(G)$ hinzu nimmt.

Man muss sich überlegen, dass ein so konstruiertes T zusammenhängend und zyklenfrei ist. $L(G)$ ist ein Wald in G (siehe Vorlesung), und zwar ein aufspannender, denn jeder Knoten besitzt eine lokal minimale Kante. Damit ergibt sich der Zusammenhang von T. Hätte T einen Zyklus, so könnte man daraus durch Kontraktion der Kanten in $L(G)$ einen Zyklus in T' konstruieren.

(iii) Sei nun T ein *minimaler* aufspannender Baum von G und $B(T)$ der korrespondierende aufspannende Baum von $B(G)$. Wäre $B(T)$ nicht minimal für $B(G)$, sondern etwa T', so hätte der dadurch induzierte aufspannende Baum $\bar{T}'$ von G nur Gewicht $w(\bar{T}') = w(T') + w(L(G)) < w(B(T)) + w(L(G)) = w(T)$ im Widerspruch zur Minimalität von T.

Aufgabe 6.3
Geben Sie „die“ Definition von *„minimaler aufspannender Wald“* an.

Lösung 6.3
Ein minimaler aufspannender Wald eines Graphen G ist ein Wald, der für jede Zusammenhangskomponente Z von G einen minimalen aufspannenden Baum enthält.