

## Aufgaben zu Kapitel 4 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

### Aufgabe 4.1

Zeigen Sie: Sind  $X$  und  $Y$  unabhängige Zufallsvariablen (die numerische Werte haben), dann sind auch  $e^X$  und  $e^Y$  unabhängige Zufallsvariablen.

### Lösung 4.1

Im vorliegenden Fall reicht eine ganz simple Argumentation.

Zwei ZV heißen unabhängig, wenn für alle  $x, y$  gilt:

$$\Pr [X = x \wedge Y = y] = \Pr [X = x] \cdot \Pr [Y = y]$$

Daher:

$$\begin{aligned} \Pr [e^X = x \wedge e^Y = y] &= \Pr [X = \ln x \wedge Y = \ln y] && \text{Injektivität von exp()} \\ &= \Pr [X = \ln x] \cdot \Pr [Y = \ln y] && \text{Unabhängigkeit von X und Y} \\ &= \Pr [e^X = x] \cdot \Pr [e^Y = y] \end{aligned}$$

### Aufgabe 4.2

Eine Zufallsvariable  $X_i$  heißt *geometrisch verteilt mit Parameter  $p$* , wenn sie Werte  $t \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  annimmt und gilt:

$$\Pr [X_i = t] = p(1 - p)^{t-1} .$$

1. Berechnen Sie den Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen.
2. Es seien nun  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige, identisch und geometrisch (mit gleichem Parameter  $p$ ) verteilte Zufallsvariablen und  $X = X_1 + \dots + X_n$ . Berechnen Sie den Erwartungswert  $\mu$  von  $X$ .

### Lösung 4.2

1.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_i] &= \sum_{t=1}^{\infty} tp(1-p)^{t-1} \\ &= p \sum_{t=1}^{\infty} t(1-p)^{t-1} \\ &= p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} \quad \text{siehe Aufgabenblatt 1} \\ &= 1/p\end{aligned}$$

$$2. \mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\sum X_i] = \sum \mathbf{E}[X_i] = n/p$$

### Aufgabe 4.3

Eine Münze, die bei jedem Wurf mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  Zahl zeigt, wird  $n$  Mal (unabhängig) geworfen. Die binäre ZV  $X_i$  sei 1, falls beim  $i$ -ten Wurf Zahl kommt und 0 sonst. Es sei  $X = \sum X_i$ .

- Welche Schranke liefert die Chebyshev-Ungleichung für die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{Pr} \left[ \left| X - \frac{n}{2} \right| \geq \frac{n}{4} \right] ?$$

- Welches Ergebnis liefert die Anwendung der Chernoff-Schranken für

$$\mathbf{Pr} \left[ \left| X - \frac{n}{2} \right| \geq \frac{n}{4} \right] ?$$

- Welches Ergebnis liefert die Anwendung der Chernoff-Schranken für

$$\mathbf{Pr} \left[ \left| X - \frac{n}{2} \right| \geq \frac{1}{2} \sqrt{6n \ln n} \right] ?$$

### Lösung 4.3

Wir benutzen folgende Formulierung der Chebyshev-Ungleichung:

$$\mathbf{Pr} [ |X - \mu_X| \geq a ] \leq \frac{\mathbf{var}[X]}{a^2}.$$

Außerdem nutzen wir die Tatsache, dass für unabhängige ZV  $X_i$  gilt:

$$\mathbf{var} \left[ \sum_i X_i \right] = \sum_i \mathbf{var} [X_i]$$

Im Falle der Münzwürfe ist  $X_i^2 = X_i$ , daher  $\mathbf{E}[X_i^2] = 1/2$ ,  $\mathbf{var}[X_i] = 1/2 - 1/4 = 1/4$  und  $\mathbf{var}[X] = n/4$ .

Damit ergibt sich:

- Chebyshev-Ungleichung:

$$\Pr \left[ \left| X - \frac{n}{2} \right| \geq \frac{n}{4} \right] \leq \frac{n/4}{(n/4)^2} = \frac{4}{n}$$

- Chernoff-Schranke:

$$\Pr \left[ \left| X - \frac{n}{2} \right| \geq \frac{n}{4} \right]$$

ist wegen  $\mu = n/2$  und  $0 < \delta = 1/2 < 1$  eine Abschätzung nach oben durch  $2 \exp(-\mu\delta^2/5)$  möglich:

$$\Pr \left[ \left| X - \frac{n}{2} \right| \geq \frac{n}{4} \right] \leq 2 \exp\left(-\frac{1}{5} \frac{n}{2} \frac{1}{2^2}\right) = 2e^{-n/40}$$

- Chernoff-Schranke im zweiten Fall:

$$\Pr \left[ \left| X - \frac{n}{2} \right| \geq \frac{1}{2} \sqrt{6n \ln n} \right]$$

ist

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{6n \ln n}}{\mu} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{6n \ln n}}{n/2} = \sqrt{\frac{6 \ln n}{n}}$$

und daher  $\delta^2 = \frac{6 \ln n}{n}$  und  $-\mu\delta^2/3 = -\ln n$ . Also

$$\Pr \left[ \left| X - \frac{n}{2} \right| \geq \frac{1}{2} \sqrt{6n \ln n} \right] \leq 2e^{-\ln n} = \frac{2}{n}$$

#### Aufgabe 4.4

Betrachten Sie die folgende Variante `RANDBITFIXING` des Bit-Fixing-Algorithmus:

- Solange aktuelle Adresse  $x$  und Zieladresse  $y$  verschieden sind, wird aus den Bitpositionen, an denen sich  $x$  und  $y$  unterscheiden, zufällig gleichverteilt ein  $i$  gewählt und der Pfad von  $x$  nach  $x \oplus e_i$  fortgesetzt.

Es soll bewiesen werden, dass wie beim deterministischen Bit-Fixing auch bei dieser Vorgehensweise beim Routen der Permutation „Matrix-Transposition“ mit großer Wahrscheinlichkeit noch „große“ Staus entstehen.

Hier ein paar Hinweise zu einer möglichen Vorgehensweise:

- Es sei  $c = d/2$ .
- Betrachten Sie die Pakete, die in den  $\sqrt{N}$  Knoten mit den Adressen

$$x = (\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_c}_{c \text{ Bits}}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{c \text{ Bits}})$$

starten.

- Betrachten Sie eine beliebige aber feste Zahl  $k$  mit  $1 \leq k \leq c$  (die Sie später geeignet wählen) und die Menge

$$S_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_c, 0, 0, \dots, 0) \mid \text{genau } k \text{ der ersten } c \text{ Bits sind } 1\}$$

Aufgaben:

1. Beweisen Sie für alle  $1 \leq k \leq n$ :  
 (a)  $\binom{n}{k}^k \leq \binom{n}{k}$       (b)  $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$ .  
 Hinweis zu (b): Stirlings Formel.
2. Wie groß ist  $S_k$ ? Geben Sie eine Abschätzung ohne Binomialkoeffizienten an.
3. Es sei  $x \in S_k$  und  $Y_x$  die Zufallsvariable mit

$$Y_x = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ durch Knoten } (0, 0, \dots, 0) \text{ transportiert wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Geben Sie eine Abschätzung für  $\mathbf{E}[Y_x]$  an, in der keine Binomialkoeffizienten vorkommen.

4. Es sei  $Z_k = \sum_{x \in S_k} Y_x$ . Schätzen Sie  $\mathbf{E}[Z_k]$  nach unten ab.
5. Geben Sie eine legale Wahl für  $k$  an, so dass  $\mathbf{E}[Z_k]$  exponentiell in  $d$  ist. Was bedeutet das?

#### Lösung 4.4

Die folgende Argumentation findet man bei David Karger (Vorlesung Randomized Algorithms (6.856J/18.416J), <http://courses.csail.mit.edu/6.856/current/>)

1. (a) für  $1 \leq k \leq n$  ist

$$\frac{n}{k} \cdot \frac{k-1}{n-1} = \frac{nk-n}{nk-k} \leq 1$$

also  $\frac{n}{k} \leq \frac{n-1}{k-1}$ , und folglich

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \\ &= \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{1} \\ &\geq \frac{n}{k} \cdots \frac{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \\ &\leq \frac{n^k}{k!} \\ &\leq \frac{n^k \cdot e^k}{\sqrt{2\pi k} \cdot k^k (1+h(k))} \\ &\leq \left(\frac{en}{k}\right)^k \end{aligned}$$

2.  $|S_k| = \binom{c}{k}$  also

$$\left(\frac{c}{k}\right)^k \leq |S_k| \leq \left(\frac{ec}{k}\right)^k$$

3. Insgesamt müssen beim Transport  $2k$  Adressbits geändert werden. Es gibt  $\binom{2k}{k}$  Möglichkeiten, welches diejenigen  $k$  sind, die als erste aktualisiert werden. Damit das Paket durch den Knoten  $(0, \dots, 0)$  transportiert wird, hat man nur eine Wahl: Es müssen die  $k$  Stellen in der linken Hälfte der Adresse sein. Also ist

$$\mathbf{E}[Y_x] = \frac{1}{\binom{2k}{k}} \geq \frac{1}{\left(\frac{2ek}{k}\right)^k} = \left(\frac{1}{2e}\right)^k$$

4.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Z_k] &= \sum_{x \in S_k} \mathbf{E}[Y_x] \geq \binom{d/2}{k} \left(\frac{1}{2e}\right)^k \geq \left(\frac{d}{2k}\right)^k \left(\frac{1}{2e}\right)^k \\ &= \left(\frac{d}{8ek}\right)^k \end{aligned}$$

5. wähle  $k = d/16e$ ; dann ist  $\mathbf{E}[Z_k] \geq \left(\frac{d}{8ed/16e}\right)^{d/16e} = 2^{d/16e}$