Aufgaben zu Kapitel 1 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

Aufgabe 1.1
Gegeben sei ein randomisierter Algorithmus badBit, der keine Eingabe liest und als Ausgabe zufällig mit Wahrscheinlichkeit p die Zahl 0 und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ die Zahl 1 liefert. Es sei $0 < p < 1$; der konkrete Wert von p sei aber unbekannt.

Entwerfen Sie einen randomisierten Algorithmus fairBit, der keine Eingabe liest und als Ausgabe immer zufällig eine der Zahlen 0 und 1 mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ liefert.

Was können Sie über die Laufzeit Ihres Algorithmus sagen?

Lösung 1.1
Algorithmusidee:

```
fairBit()
repeat  x ← badBit()
        y ← badBit()
   until (x ≠ y)
return x
```

Im folgenden benutzen wir folgende Überlegung (für $z \in \mathbb{R}$ mit $0 < z < 1$):

$$\begin{aligned}
\text{sei} \qquad R &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot z^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot z^i \\
\text{dann} \qquad Rz &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot z^i \\
\text{also} \qquad R(1-z) &= \sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z} \\
\text{also} \qquad R &= \frac{1}{(1-z)^2}
\end{aligned}$$

Nun ist im Algorithmus die Wahrscheinlichkeit für $x = y$ gleich $z = p^2 + q^2$, also $1 - z = 2pq$. Wegen $0 < p < 1$ ist $0 < z < 1$. Daher ergibt sich für den Erwartungswert der Anzahl Aufrufe von badBit:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot 2 \cdot (p^2 + q^2)^{i-1} 2pq = 4pq \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot z^{i-1} = 4pq \frac{1}{4p^2q^2} = \frac{1}{pq}$$

Aufgabe 1.2

Gegeben sei ein randomisierter Algorithmus fairBit wie in Aufgabe 1.

Entwerfen Sie einen randomisierten Algorithmus, der keine Eingabe liest und als Ausgabe zufällig gleichverteilt eine von drei Zahlen 0, 1 oder 2 liefert.

Was können Sie über die Laufzeit Ihres Algorithmus sagen?

Lösung 1.2
Algorithmusidee:

```
randomTrit()
repeat  x ← fairBit()
        y ← fairBit()
   until (x = 0 ∨ y = 0)
return 2x + y
```

Erwartungswert der Anzahl Aufrufe von fairBit:

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2i \left(\frac{1}{4}\right)^{i-1} \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \frac{1}{(3/4)^2} = \frac{8}{3}$$

Aufgabe 1.3
Es sei n eine ungerade natürliche Zahl. Es werde n mal Algorithmus fairBit aufgerufen.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass insgesamt öfter eine 1 als eine 0 ausgegeben wird?
- Können Sie das auch *ausrechnen*?

Lösung 1.3

- Die Wahrscheinlichkeit, dass insgesamt öfter eine 1 als eine 0 ausgegeben wird, ist genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass insgesamt öfter eine 0 als eine 1 ausgegeben wird. Also sind beide Wahrscheinlichkeiten genau 1/2.
- Es sei $h = \lfloor n/2 \rfloor$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

  $$\sum_{i=0}^{h} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^n = \frac{1}{2}$$

  wobei bei der Rechnung ausgenutzt wurde, dass

  $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n \qquad \text{und} \qquad \binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$$