Randomisierte Algorithmen

6. Graph-Algorithmen

Thomas Worsch

Fakultät für Informatik
Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2019/2020

Überblick

Überblick

6.1 Definition (Multigraph)

- *ungerichteter Multigraph* (V, E, v) mit
  - Knotenmenge V der Größe $n = |V|$
  - Kantenmenge E der Größe $m = |E|$
  - Abbildung $v : E \to \{\{x, y\} \mid x, y \in V\}$
- Es sind *Mehrfachkanten* möglich.
- In diesem Kapitel:
  keine Schlingen, also $\forall e \in E : |v(e)| = 2$.

6.3 Repräsentation von Multigraphen

- «Adjazenzmatrix» A der Größe $n \times n$
  Eintrag $A[x, y]$: Anxahl Kanten zwischen x und y:
  $A[x, y] = \left|v^{-1}(\{x, y\})\right|$
- außerdem nützlich: Vektor M der Größe n:
  Eintrag $M[x]$ gibt an, wieviele Kanten von x wegführen:
  $M[x] = \sum_y A[x, y]$

Überblick

6.4 Definition Schnitte

- Ein *Schnitt* in einem Multigraphen ist
  eine Partitionierung $V = C \cup \bar{C}$.
- *Größe des Schnittes* ist
  die Anzahl der Kanten $\{x, y\}$ mit $x \in C$ und $y \in \bar{C}$.

MINCUT

- Probleminstanz: ein Graph G
- Frage: Wie groß sind die minimalen Schnitte von G?

- beste bekannte deterministische Algorithmen brauchen Laufzeit $O(mn + n^2 \log n) \subseteq O(n^3)$
  - für planare Graphen reicht $O(n(\log n)^2)$

- randomisiert?

6.5 Lemma

Wenn die Größe der minimalen Schnitte k ist, dann

- hat jeder Knoten mindestens Grad k
- ist die Anzahl Kanten $m \geq nk/2$

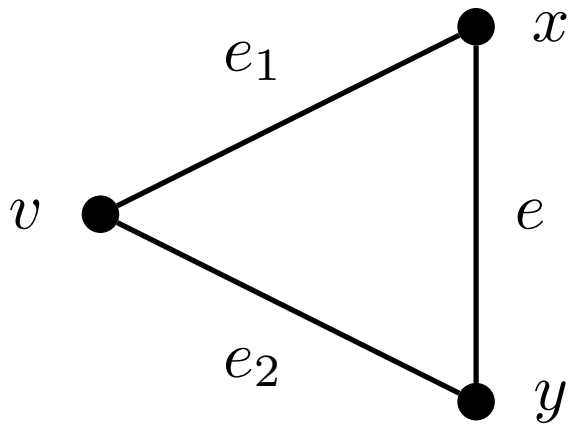
6.6 Beweis

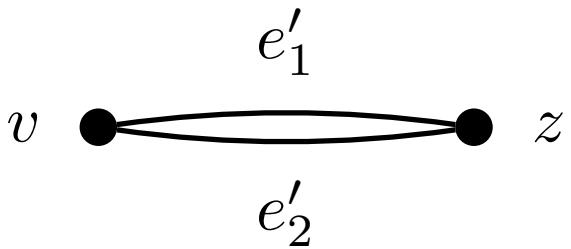
- Wäre anderenfalls $\deg(x) < k$,
- dann hätte der Schnitt mit $C = \{x\}$ eine Größe echt kleiner k.

6.7 Definition Kontraktion

- In Multigraph G seien Knoten x und y durch eine Kante e mit $v(e) = \{x, y\}$ verbunden.
- G/e entsteht durch *Kontraktion der Kante e*:
  - Knotenmenge $V' = (V \setminus \{x, y\}) \cup \{z\}$, wobei z neu ist.
  - Kantenmenge E' ergibt sich aus E, indem
    - alle Kanten zwischen x und y entfernt werden,
    - jede Kante zwischen $v \in V \setminus \{x, y\}$ und x oder y ersetzen durch Kante zwischen v und z
    - alle anderen Kanten von G übernehmen

6.8 Beispiel





Es können Mehrfachkanten entstehen.

6.9 Lemma

Minimale Schnitte von G/e sind

$$\left\{\begin{array}{c}\text{mindestens?}\\ \text{genauso?}\\ \text{höchstens?}\end{array}\right\} \text{ so groß}$$

wie minimale Schnitte von G.

6.9 Lemma

Minimale Schnitte von G/e sind

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{mindestens!} \\ \sout{\text{genauso?}} \\ \sout{\text{höchstens?}} \end{array} \right\} \text{ so groß}$$

wie minimale Schnitte von G.

6.10 Beweis

- Betrachte minimalen Schnitt $(K, \bar{K})$ von G/e.
- Seine Größe sei k.
- O. B. d. A. seien die Endknoten x und y von e in K.
- Indem man diese beiden Knoten «aus der Kontraktion auspackt» und in der gleichen Partition belässt, erhält man einen Schnitt von G, dessen Größe ebenfalls k ist.
- Also haben die minimalen Schnitte von G *höchstens* Größe k.

6.11 Algorithmus

- Sei G Multigraph mit Kante e zwischen x und $y > x$.
- Wie in 6.3 vereinbart, sei
  - A «Adjazenzmatrix»
  - M Vektor mit $M[x] = \sum_y A[x, y]$
  - n, m Variablen für Knoten- bzw. Kantenzahl
- Die Datenstrukturen für G/e lassen sich wie folgt in Linearzeit berechnen:

6.11 Algorithmus (2a)

proc graph $\leftarrow$ Kontraktion(**graph** G, **edge** e)
$x \leftarrow \min(v(e))$
$y \leftarrow \max(v(e))$ $\quad$ $\langle y \neq x$ *da* G *schlingenfrei*$\rangle$
$\langle$*Idee: benutze Zeile/Spalte «*x *für* z*»*$\rangle$
$\langle$ $\quad$ *und Zeile/Spalte «*y *für* n*»*$\rangle$
$z \leftarrow x$

$\langle$*Aktualisierung der Kantenzahlen*$\rangle$
$m \leftarrow m - A[x, y]$
$M[z] \leftarrow M[x] + M[y] - 2 \cdot A[x, y]$
$M[y] \leftarrow M[n]$

6.11 Algorithmus (2b)

⟨*Aktualisierung von Zeile/Spalte z:*⟩
$A[z,\cdot] \leftarrow A[x,\cdot] + A[y,\cdot]$
$A[\cdot,z] \leftarrow A[\cdot,x] + A[\cdot,y]$
$A[z,z] \leftarrow 0$
⟨*Aktualisierung von Zeile/Spalte y:* ⟩
$A[y,\cdot] \leftarrow A[n,\cdot]$
$A[\cdot,y] \leftarrow A[\cdot,n]$
⟨*die bisherige Zeile n ist nun bedeutungslos*⟩
⟨*Aktualisierung der Knotenzahl*⟩
$n \leftarrow n-1$
return ⟨*Graph, der zu den neuen Datenstrukturen gehört*⟩

6.12 Erster randomisierter Algorithmus

6.12 Erster randomisierter Algorithmus

Iterierte Kontraktion

6.12 Erster randomisierter Algorithmus

Iterierte Kontraktion

$\langle$*Eingabe: ein Multigraph* $G(V, E)\rangle$
$\langle$*Ausgabe: ein Schnitt* $(C, \bar{C})\rangle$
$H \leftarrow G$
while (H hat mehr als 2 Knoten) **do**
    $e \leftarrow \langle$*zufällig gleichverteilt gewählte Kante von* $H\rangle$
    $H \leftarrow \text{Kontraktion}(H, e)$
od
$(C, \bar{C}) \leftarrow \langle$*die Knotenmengen von* G*,*$\rangle$
    $\langle$*die den Knoten von* H *entsprechen*$\rangle$

6.13 Satz

Algorithmus 6.12 kann so implementiert werden, dass die Laufzeit in $O(n^2)$ ist.

6.14 Beweis

- Jeder Aufruf von Kontraktion benötigt Laufzeit $O(n)$.
- Bei jedem Schleifendurchlauf wird die Anzahl der Knoten von H um 1 erniedrigt, d. h. es gibt $n - 2$ solche Durchläufe.
- Es bleibt zu implementieren:
  1. zufällige gleichverteilte Auswahl einer Kante des Multigraphen
  2. Beschaffung der Mengen C und $\bar{C}$

6.14 Beweis (2)

1. Zufällige Kantenwahl:

6.14 Beweis (2)

1. Zufällige Kantenwahl:

$i \leftarrow$ **random**$(1, 2m)$ $\langle$*NB: jede Kante unten zweimal gezählt!*$\rangle$

$x \leftarrow 0; s \leftarrow 0$

while $s < i$ **do**

$x \leftarrow x + 1$

$s \leftarrow s + M[x]$

od

$i \leftarrow i - (s - M[x])$

$y \leftarrow 0; s \leftarrow 0$

while $s < i$ **do**

$y \leftarrow y + 1$

$s \leftarrow s + A[x, y]$

od

$\langle$*Wähle Kante zwischen* x *und* $y\rangle$

6.14 Beweis (3)

2. Beschaffung von C und $\bar{C}$:
   - weitere Datenstruktur in der Prozedur Kontraktion
   - boolesche Matrix Q mit so vielen Zeilen und Spalten wie der ursprüngliche Graph G Knoten hat.
   - $Q[x, y] = 1$: Knoten mit Ursprungsnummern x und y wurden kontrahiert.
   - Initialisierung: Einheitsmatrix.
   - $$Q[x, \cdot] \leftarrow Q[x, \cdot] \vee Q[y, \cdot]$$
     $$Q[y, \cdot] \leftarrow Q[n, \cdot]$$
   - Am Ende nur noch zwei Knoten:
     - C z. B. durch 1-Einträge in Zeile 1 von Q gegeben
     - $\bar{C}$ z. B. durch 0-Einträge in Zeile 1 von Q gegeben

6.15 Satz

Algorithmus 6.12 findet einen minimalen Schnitt mit einer

Wahrscheinlichkeit, die $\left\{\begin{array}{c}\text{ziemlich groß?}\\ \text{mittel?}\\ \text{ziemlich klein?}\end{array}\right\}$ ist.

6.15 Satz

Algorithmus 6.12 findet einen minimalen Schnitt mit einer Wahrscheinlichkeit, die $\left\{ \begin{array}{c} \sout{\text{ziemlich groß?}} \\ \sout{\text{mittel?}} \\ \text{in } \Omega(n^{-2}) \end{array} \right\}$ ist.

6.16 Beweis

in 3 Schritten

1. Es sei $(C, \bar{C})$ irgendein Schnitt. Behauptung:

   Algorithmus 6.12 liefert diesen Schnitt als Ergebnis gdw keine seiner Kanten kontrahiert wird.

   - sei e eine am Ende noch vorhandene Kante ursprünglich zwischen x und y
   - also etwa $x \in C$ und $y \in \bar{C}$
   - wäre e kontrahiert worden, müssten am Ende x und y zum gleichen Knoten von H gehören

6.16 Beweis (2)

2. Es sei $(K, \bar{K})$ ein minimaler Schnitt von G der Größe k.
   - Nach $i-1$ Schleifendurchläufen sei noch keine Kante dieses Schnittes kontrahiert worden.
   - dann ist $(K, \bar{K})$ ein Schnitt des dann erhaltenen Graphen H_{i-1} und wegen Lemma 6.9 auch ein minimaler
   - Also enthält H_{i-1} noch mindestens $(n-i+1)k/2$ Kanten.

   Folglich:
   - Wahrscheinlichkeit, dass als nächstes eine der k Kanten, die zum Schnitt K gehören, kontrahiert wird, höchstens $2/(n-i+1)$;
   - Wahrscheinlichkeit, dass keine dieser Kanten kontrahiert wird, mindestens $1-2/(n-i+1)$.

6.16 Beweis (3)

3. Die Wahrscheinlichkeit, dass in keinem der Schritte eine der Kanten des Schnittes K kontrahiert wird, ist daher mindestens

$$\prod_{i=1}^{n-2}\left(1-\frac{2}{n-i+1}\right)=\frac{\prod_{i=1}^{n-2}(n-i-1)}{\prod_{i=1}^{n-2}(n-i+1)}$$

$$=\frac{(n-2)!}{n!/2!}$$

$$=\frac{(n-2)!2!}{n!}$$

$$>\frac{2}{n^2}\in\Omega(\frac{1}{n^2})$$

Bemerkung

- Die Nicht-Fehler-Wahrscheinlichkeit von $1/n^2$ in Satz 6.15 ist klein.
- Der kleinste von $k = n^2/2$ Schnitten ist mit W.keit $1 - 1/e$ minimal:

$$\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{n^2/2} < \frac{1}{e}$$

  Weitere Rechnung zeigt: $k \in \Omega(n^2)$ erzwungen.
- Gesamtlaufzeit: $\Theta(n^4)$
  im Gegensatz zu $O(n^3)$ im Deterministischen

Bemerkung

- Die Nicht-Fehler-Wahrscheinlichkeit von $1/n^2$ in Satz 6.15 ist klein.
- Der kleinste von $k = n^2/2$ Schnitten ist mit W.keit $1 - 1/e$ minimal:

$$\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{n^2/2} < \frac{1}{e}$$

  Weitere Rechnung zeigt: $k \in \Omega(n^2)$ erzwungen.
- Gesamtlaufzeit: $\Theta(n^4)$
  im Gegensatz zu $O(n^3)$ im Deterministischen
- Problem: Bei kleinen Graphen werden zu oft «aus Versehen» Kanten eines minimalen Schnittes kontrahiert.
- Besser: randomisiert auf t Knoten kontrahieren, Rest deterministisch

6.17 Algorithmus

proc graph $\leftarrow$ IterContract(**graph** G, **int** t)
    $\langle$*Eingabe: ein Multigraph* $G(V, E, v)$ *und*$\rangle$
    $\langle$ *Endzahl* t *von Knoten*$\rangle$
    $\langle$*Ausgabe: ein kontrahierter Graph* H *mit* t *Knoten*$\rangle$
    $H \leftarrow G$
    while (H hat mehr als t Knoten) **do**
        $e \leftarrow \langle$*zufällig gleichverteilt gewählte Kante von* $H\rangle$
        $H \leftarrow$ Kontraktion(H, e)
    od
    return H

6.18 Lemma

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei Algorithmus 6.17 im Ergebnis H noch ein minimaler Schnitt des ursprünglichen Graphen «noch vorhanden» ist, ist mindestens

$$\binom{t}{2} / \binom{n}{2} .$$

6.19 Beweis

Abschätzung analog wie in Beweis 6.16:

$$\prod_{i=1}^{n-t}\left(1-\frac{2}{n-i+1}\right) = \frac{\prod_{i=1}^{n-t}(n-i-1)}{\prod_{i=1}^{n-t}(n-i+1)}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n-t-2}(n-i-1)t(t-1)}{n(n-1)\prod_{i=3}^{n-t}(n-i+1)}$$

$$= \frac{t(t-1)}{n(n-1)}$$

$$= \binom{t}{2}/\binom{n}{2} \in \Omega((t/n)^2)$$

6.20 Algorithmus

proc cut $\leftarrow$ IterContractDetMinCut(**graph** G, **int** t)
    $\langle$*Eingabe: ein Multigraph* $G(V, E, v)$ *und*$\rangle$
    $\langle$ *eine Knotenzahl* $t\rangle$
    $\langle$*Ausgabe: ein Schnitt von* $G\rangle$
    $C \leftarrow \langle$*ein trivialer Schnitt*$\rangle$
    for $i \leftarrow 1$ **to** n^2/t^2 **do**
        $H \leftarrow \text{IterContract}(G, t)$
        $D \leftarrow \text{DetMinCut}(H)$
        $C \leftarrow \min(C, D)$
    od
    return C

6.21 Lemma

Wählt man in Algorithmus 6.20 $t = n^{2/3}$, dann ist die Laufzeit in $O(n^{8/3})$ und die Wahrscheinlichkeit, einen minimalen Schnitt von G zu erhalten mindestens $1 - 1/e$.

6.22 Beweis

- Zeitbedarf ist kleiner gleich

$$\frac{n^2}{t^2} \cdot (n^2 + t^3) = \frac{n^4}{t^2} + n^2 t \ .$$

- Für gewähltes t beide Summanden größenordungsmäßig in $O(n^{8/3})$.
- Fehlerwahrscheinlichkeit höchstens

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2/t^2} < \frac{1}{e} \ .$$

6.23 Algorithmus

proc cut $\leftarrow$ FastCut(**graph** G)
    $\langle$*Eingabe: ein Multigraph* $G(V, E)\rangle$
    $\langle$*Ausgabe: ein Schnitt* $C\rangle$
    if $(|V| \leq 6)$ **then**
        $C \leftarrow \langle$*minimaler Schnitt, deterministisch ermittelt*$\rangle$
    else

    fi

6.23 Algorithmus

proc cut $\leftarrow$ FastCut(**graph** G)
$\langle$*Eingabe: ein Multigraph* $G(V, E)\rangle$
$\langle$*Ausgabe: ein Schnitt* $C\rangle$
if $(|V| \leq 6)$ **then**
$C \leftarrow \langle$*minimaler Schnitt, deterministisch ermittelt*$\rangle$
else
$t \leftarrow \lceil 1 + n/\sqrt{2} \rceil$
$H_1 \leftarrow \text{IterContract}(G, t)$
$H_2 \leftarrow \text{IterContract}(G, t)$
$C_1 \leftarrow \text{FastCut}(H_1)$
$C_2 \leftarrow \text{FastCut}(H_2)$
$C \leftarrow \min(C_1, C_2)$
fi

6.24 Satz

Alg. 6.23 hat Laufzeit $O(n^2 \log n)$.

6.25 Beweis

- maximale Rekursionstiefe: $\Theta(\log n)$
- beide Aufrufe von **IterContract** benötigen Zeit $O(n^2)$
- Gesamtzeitbedarf $T(n)$ für Eingabegraphen mit n Knoten

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\left\lceil 1 + n/\sqrt{2} \right\rceil\right) + O(n^2)$$

- daher $T(n) \in O(n^2 \log n)$ (Mastertheorem)

6.26 Satz

Alg. 6.23 liefert mit Wahrscheinlichkeit in $\Omega(1/\log n)$ minimalen Schnitt.

6.27 Beweis

- G Eingabegraph mit minimalen Schnitten der Größe k
- solcher Schnitt habe eine Reihe rekursiver Aufrufe von FastCut bis zu einer Stelle «überlebt».
- dann erreichter Graph heiße H
- Aufrufe von IterContract liefern Graphen H_1 und H_2
- Aufruf für H wird minimalen Schnitt für G liefern, falls für ein H_i gilt:
  1. Schnitt überlebt die Kontraktionen zur Konstruktion von H_i
  2. FastCut(H_i) findet einen minimalen Schnitt in H_i

6.27 Beweis (2)

Die Wahrscheinlichkeit für Punkt 1 ist nach Lemma 6.17 mindestens

$$\frac{\lceil 1 + t/\sqrt{2} \rceil (\lceil 1 + t/\sqrt{2} \rceil - 1)}{t(t-1)} \geq \frac{t/\sqrt{2} \cdot t/\sqrt{2}}{t(t-1)} \geq \frac{1}{2} \frac{t^2}{t(t-1)} \geq \frac{1}{2} .$$

6.27 Beweis (3)

Zu Punkt 2.:

- interessant: *untere Schranke* $p(r)$ der W.keit, dass FastCut r Niveaus über dem Rekursionsabbruch minimalen Schnitt findet
- $p(0) = 1$ und

$$p(r+1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \cdot p(r)\right)^2 = p(r) - \frac{p(r)^2}{4}$$

- Substitution $q(r) = 4/p(r) - 1$ bzw. $p(r) = 4/(q(r)+1)$:

$$\frac{4}{q(r+1)+1} = \frac{4}{q(r)+1} - \frac{4}{(q(r)+1)^2} = \frac{4q(r)}{(q(r)+1)^2}$$

- und weiter $q(r+1) = q(r) + 1 + \frac{1}{q(r)}$.

6.27 Beweis (4)

- Induktion: Für alle r gilt:

$$r < q(r) < r + 3 + H_{r-1}$$

- Offensichtlich ist $q(0) = 3$ und $r < q(r)$ für alle r.
- Weiter:

$$\begin{aligned} r + 1 < q(r) + 1 < q(r + 1) &= q(r) + 1 + \frac{1}{q(r)} \\ &< r + 3 + H_{r-1} + 1 + \frac{1}{r} \\ &= (r + 1) + 3 + H_r \end{aligned}$$

- Daher ist $q(r) \in r + O(\log r)$ und folglich $p(r) \in \Omega(1/r)$.
- Für Ausgangsgraphen mit n Knoten ist die Rekursionstiefe $\Theta(\log n)$
- folglich gesuchte Wahrscheinlichkeit $\Omega(1/\log n)$.

Überblick

Überblick

Problemstellung

Gegeben: Graph $G = (V, E)$

- zusammenhängend, ungerichtet
- Kanten e mit reellen Zahlen $w(e)$ gewichtet

Gesucht:
minimaler aufspannender Baum (minimum spanning tree, MST), d. h.

- Teilgraph von G, der
- Baum ist,
- G aufspannt und
- unter allen solchen Bäumen minimales Gewicht hat.

Falls G nicht zusammenhängend, existiert nur ein minimaler aufspannender Wald (minimum spanning forest, MSF).

Allgemeine Annahme

O. B. d. A. seien alle Kantengewichte paarweise verschieden.

Überblick

Definition

Eine Kante e in einem gewichteten Graphen G heißt *lokal minimal*, wenn für einen Endpunkt x von e gilt:

Von allen Kanten, die mit x inzidieren, hat e das kleinste Gewicht.

Lemma

Jede lokal minimale Kante gehört zu einem MST von G.

Beweis

- $e = \{x, y\}$ lokal minimale Kante eines Knotens x.
- T' ein aufspannender Baum von G, der *nicht* e enthalte.

Zeige: T' hat nicht minimales Gewicht.

lautes Nachdenken an der Tafel

Beweis

- $e = \{x, y\}$ lokal minimale Kante eines Knotens x.
- T' ein aufspannender Baum von G, der *nicht* e enthalte.

Zeige: T' hat nicht minimales Gewicht.

- Sei e' die Kante von T',
  - die von x wegführt und
  - in T' auf dem kürzesten Weg von x nach y liegt.
- betrachte $T = T' - e' + e$
- Behauptungen
  1. $w(T) < w(T')$.
  2. T spannt G auf.
  3. T ist ein Baum.

Korollar

Die lokal minimalen Kanten eines Graphen bilden ein Wald.

Borůvka-Phase

Algorithmus, der folgendes leistet:

1. berechne Menge $L(G)$ aller lokal minimalen Kanten von G
2. berechne den kontrahierten Graphen $B(G) = G/L(G)$
   - entstünden Mehrfachkanten,
     wird nur die leichteste Einzelkante behalten

Lemma

Eine Borůvka-Phase kann man in Zeit $O(m+n)$ implementieren.

Lemma

Durch eine Borůvka-Phase wird die Anzahl der Knoten um mindestens die Hälfte reduziert.

Beweis

- jede Kante für höchstens zwei Knoten lokal minimal
- also pro Borůvka-Phase mindestens $n/2$ Kanten entfernt
- jede Kantenkontraktion entfernt auch ein Knoten

Lemma

Für jeden Graphen G gilt:
Die Kanten in $L(G)$ und die Kanten eines MST von $B(G)$ bilden zusammen einen MST von G.

Beweis

- Jeder aufspannende Baum T von G, der $L(G)$ «enthält», induziert einen aufspannenden Baum T' von $B(G)$ mit $w(T') = w(T) - w(L(G))$.
- Jeder aufspannde Baum T' von $B(G)$ induziert einen aufspannenden Baum $\bar{T}'$ von G, der $L(G)$ «enthält», mit $w(T) = w(T') + w(L(G))$.

- Sei T *minimaler* aufspannender Baum von G und $B(T)$ der zugehörige aufspannende Baum von $B(G)$.
- Wäre $B(T)$ nicht minimal für $B(G)$, sondern etwa T',
- so hätte der dadurch induzierte aufspannende Baum $\bar{T}'$ von G nur Gewicht $w(\bar{T}') = w(T') + w(L(G)) < w(B(T)) + w(L(G)) = w(T)$ im Widerspruch zur Minimalität von T.

Korollar

Wenn alle Kantengewichte paarweise verschieden sind, ist der MST eindeutig.

Borůvkas MST-Algorithmus

- Borůvka-Phasen bis nur noch 1 Knoten im Graph
- führe Buch, welche Kanten jeweils kontrahiert werden
- vorangegangene Lemmata: klar, welche Kanten MST bilden

Lemma

Borůvkas MST-Algorithmus benötigt $O(m \log n)$ Zeit.

Beweis

- $O(\log n)$ viele Phasen,
- von denen jede $O(m+n)$ Zeit benötigt
- In zusammenhängenden Graphen ist $n \in O(m)$.

Andere deterministische Algorithmen

Bernard Chazelle

A Minimum Spanning Tree Algorithm with Inverse-Ackermann Type Complexity

Journal of the ACM, 47:1028–1047, 2000.

- Laufzeit $O(m\alpha(m,n))$
- mit $\alpha(m,n) = \min\{i \geq 1 \mid A(i, \lfloor m/n \rfloor) \geq \log_2 n\}$

Andere deterministische Algorithmen

Bernard Chazelle

A Minimum Spanning Tree Algorithm with Inverse-Ackermann Type Complexity

Journal of the ACM, 47:1028–1047, 2000.

- Laufzeit $O(m\alpha(m,n))$
- mit $\alpha(m,n) = \min\{i \geq 1 \mid A(i, \lfloor m/n \rfloor) \geq \log_2 n\}$

Seth Pettie, Vijaya Ramachandran

An optimal minimum spanning tree algorithm

Journal of the ACM, 49:16–34, 2002.

Andere deterministische Algorithmen

Bernard Chazelle

A Minimum Spanning Tree Algorithm with Inverse-Ackermann Type Complexity

Journal of the ACM, 47:1028–1047, 2000.

- Laufzeit $O(m\alpha(m,n))$
- mit $\alpha(m,n) = \min\{i \geq 1 \mid A(i, \lfloor m/n \rfloor) \geq \log_2 n\}$

Seth Pettie, Vijaya Ramachandran

An optimal minimum spanning tree algorithm

Journal of the ACM, 49:16–34, 2002.

«Although our time bound is optimal, the exact function describing it is not known at present.»

Inverse Ackermann-Funktion(en)

siehe auch

- Folien von Raimund Seidel:
  http://cgi.di.uoa.gr/~ewcg06/invited/Seidel.pdf
- WWW-Beitrag von Gabriel Nivasch:
  http://www.gabrielnivasch.org/fun/inverse-ackermann

Überblick

Definition

- sei F ein Wald in G (beliebig, nicht notwendig MSF)
- v_1 und v_2 zwei Knoten von G und
- $P(v_1, v_2)$ die Menge der Kanten des kürzesten Pfades in F von v_1 nach v_2 (oder $P = \emptyset$)
- Definiere

$$W_F(v_1, v_2) = \begin{cases} \max\{w(e) \mid e \in P(v_1, v_2)\} & \text{falls } v_1, v_2 \text{ im} \\ & \text{gleichen Baum} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

- Kante $e = \{v_1, v_2\}$ heißt *F-schwer*, falls $w(e) > W_F(v_1, v_2)$ ist, und
- sie heißt *F-leicht*, falls $w(e) \leq W_F(v_1, v_2)$.

Lemma

- Es sei
  - F' ein beliebiger(!) Wald von G und
  - $e = \{v_1, v_2\}$ eine Kante in G.
- Wenn e F'-schwer, dann gehört e nicht zum MST von G.
- äquivalent:
  Wenn eine Kante zum MST gehört, dann ist sie F'-leicht.
  - wohlgemerkt für beliebigen Wald F'
- äquivalent:
  Die schwerste Kante eines Kreises gehört nie zum MST.

Beweis

- Kante $e = \{v_1, v_2\}$ sei F'-schwer und
- es bezeichne P den Pfad von v_1 nach v_2, dessen Kanten alle leichter sind als die Kante e selbst.

Bei Bestimmung des MST mit Borůvkas Algorithmus wird e

- *nie* lokal minimale Kante von v_1 oder v_2 sein,
  (sondern immer eine der Kanten von P)
- also auch nie zum (eindeutigen) MST hinzugenommen.

Lemma

Ein aufspannender Baum T eines Graphen G hat minimales Gewicht, wenn die einzigen T-leichten Kanten in G die Kanten von T sind.

Beweis

- Wenn die einzigen T-leichten Kanten in G die Kanten von T sind,
- dann sind alle Kanten, die nicht zu T gehören T-schwer.
- Also gehören sie also sicher nicht zum MST von G.
- Also besteht der MST nur aus Kanten, die zu T gehören.
- Von ihnen kann man aber auch keine weglassen, da es dann kein aufspannender Baum von G mehr ist.

Satz (Dixon (1992), King (1997))

Zu einem Graphen G und einem Wald F in G kann man alle F-schweren Kanten von G in Zeit $O(m+n)$ finden.

Beweis: nicht leicht.

Wir werden den Satz einfach verwenden.

Überblick

Zufällige Teilgraphen

RandomSample(G, p) sei eine Funktion, die

- einen Graphen G' mit den gleichen Knoten wie in G liefert,
- bei dem jede Kante von G unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p zu G' hinzugenommen wird.

Lemma

- Wenn die Kanten eines Graphen G nach aufsteigendem Gewicht sortiert vorliegen,
- dann kann zu gegebenen p
  für ein $G' = \text{RandomSample}(G, p)$
  ein MSF F' konstruiert werden,
- indem man jede Kante von G nur einmal betrachtet.

Achtung:

- Wir werden dieses Vorgehen nicht in unserem letzendlichen Algorithmus verwenden,
- sondern nur, um das Lemma nach diesem zu beweisen.

Beweis

- Kanten $e_1, \ldots, e_m$ nach aufsteigendem Gewicht geordnet
- konstruiere gleichzeitig
  $G' = \text{RandomSample}(G, p)$ und MSF F' von G'

$k \leftarrow 0$; $F'_k \leftarrow \emptyset$
for $i \leftarrow 1$ **to** m **do**
  $\langle$„*betrachte*“ *Kante* $e_i\rangle$
  if $\text{RandomFloat}(0,1) \leq p$ **then**
    $\langle$*nimm* $e_i = \{u, v\}$ *zu* G' *hinzu*$\rangle$

lautes Nachdenken an der Tafel

    fi
  fi
od

Beweis

- Kanten $e_1, \ldots, e_m$ nach aufsteigendem Gewicht geordnet
- konstruiere gleichzeitig
  $G' = \text{RandomSample}(G, p)$ und MSF F' von G'

$k \leftarrow 0$; $F'_k \leftarrow \emptyset$
for $i \leftarrow 1$ **to** m **do**
  $\langle$„*betrachte*“ *Kante* $e_i\rangle$
  if $\text{RandomFloat}(0,1) \leq p$ **then**
    $\langle$*nimm* $e_i = \{u, v\}$ *zu* G' *hinzu*$\rangle$
    if $\langle u, v$ *in versch. Zshg.komp. von* $F'_{k-1}\rangle$ **then**
      $k \leftarrow k + 1$; $F'_k \leftarrow F'_{k-1} + e_i$
    fi
  fi
od
$F' \leftarrow F'_k$ $\langle$*ist der MSF*$\rangle$

Beweis (2)

- Offensichtlich wird ein Wald F' konstruiert.
- zeige: F' ist MSF (mit vorigem Lemma)
- zeige: jede F'-leichte Kante von G' ist in F'.
- sei $e = \{v_1, v_2\}$ ist F'-leicht
- Zwei Möglichkeiten:
  1. v_1 und v_2 liegen in verschiedenen Bäumen von F'.
  2. v_1 und v_2 liegen in einem Baum T' von F', eine Kante e' auf Pfad $v_1 \rightsquigarrow v_2$ in T hat größeres Gewicht als e

Beweis (2)

- Offensichtlich wird ein Wald F' konstruiert.
- zeige: F' ist MSF (mit vorigem Lemma)
- zeige: jede F'-leichte Kante von G' ist in F'.
- sei $e = \{v_1, v_2\}$ ist F'-leicht
- Zwei Möglichkeiten:
  1. v_1 und v_2 liegen in verschiedenen Bäumen von F'.
  2. v_1 und v_2 liegen in einem Baum T' von F', eine Kante e' auf Pfad $v_1 \rightsquigarrow v_2$ in T hat größeres Gewicht als e
- in *beiden* Fällen galt, als e betrachtet wurde und ein F'_k vorlag:
  - v_1 und v_2 lagen in verschiedenen Bäumen von F'_k.
  - Dann wird e zu F'_k hinzugenommen worden.

Lemma

- Sei F' der MSF von $G' = \text{RandomSample}(G, p)$.
- Dann ist der Erwartungswert für die Anzahl der F'-leichten Kanten von G (!) kleiner oder gleich n/p.

Beweis (1)

- betrachte vorangegangenen Algorithmus
- Wenn Kante e von G am Ende
  - F'-leicht ist, dann war sie auch schon F'_k-leicht zu dem Zeitpunkt, zu dem sie „betrachtet“ wurde
  - F'-schwer ist, dann war sie auch schon F'_k-schwer zu dem Zeitpunkt, zu dem sie „betrachtet“ wurde

Beweis (2)

- *Phase* $i \geq 1$: Schleifendurchläufe solange $k = i - 1$
- Während Phase i hat jede Kante von G, die F'_{i-1}-leicht ist, Wahrscheinlichkeit p, dass sie zu G' und folglich zu F'_{i-1} hinzu genommen wird.
- mit erster Wahl einer solchen Kante endet die Phase
- Anzahl der in Phase i betrachteten F'_{i-1}-leichten Kanten geometrisch verteilt mit Parameter p
- Erwartungswert ist $1/p$ (Übungsblatt 4)

Beweis (3)

- Am Ende ist $|F'| = k \leq n - 1$, d. h. es ist $k \leq n - 1$ mal die Bedingung $\text{RandomFloat}(0, 1) < p$ erfüllt.

- Berücksichtigung der restlichen F'-leichten Kanten, die alle *nicht* mehr zu F' hinzugenommen werden:
  - **for**-Schleife weitermachen, bis n mal „$\text{RandomFloat}(0, 1) < p$“ wahr
  - Erwartungswert für Anzahl Schritte jeweils $1/p$ bis einmal der Fall
  - ZV Y: *insgesamt* notwendige Schleifendurchläufe
- Y dominiert interessierende Anzahl Schleifendurchläufe.
- $\mathbf{E}[Y] = n/p$.

Randomisierter Algorithmus für MSF-Berechnung

proc $F \leftarrow \mathrm{MSF}(G)$:

1. $G_1 \leftarrow B(B(B(G)))$
   $C_1 \leftarrow \langle$*Kanten, die bei Berechnung von* G_1 *kontrahiert*$\rangle$
   if $\langle G_1$ *enthält keine Kanten mehr*$\rangle$ **then**
   return C_1
   fi
2. $G_2 \leftarrow \mathrm{RandomSample}(G_1, 1/2)$
3. $F_2 \leftarrow \mathrm{MSF}(G_2)$
4. $C_2 \leftarrow \langle$*die* F_2*-schweren Kanten in* $G_1\rangle$
   $G_3 \leftarrow \langle G_1$ *ohne die Kanten in* $C_2\rangle$
5. $F_3 \leftarrow \mathrm{MSF}(G_3)$
6. $F \leftarrow C_1 \cup F_3$

return F

Satz

Der obige Algorithmus berechnet den MSF des Eingabegraphen G.

Beweis

zu 1. Die Kanten aus C_1 gehören zum MSF von G.
Enthält G_1 keine Kanten, dann bildet Kantenmenge C_1 den MSF.

zu 3. F_2 ist ein Wald in G_2 und folglich auch in G_1 und G.

zu 4. Die F_2-schweren Kanten von G_1 gehören nicht zum MSF von G_1.
Folglich hat G_3 den gleichen MSF wie G_1,

zu 5. der als F_3 berechnet wird.

zu 6. Also ist $C_1 \cup F_3$ ein MSF und wegen Zusammenhang sogar ein MST von G.

Satz

Der Erwartungswert für die Laufzeit des Algorithmus ist $O(m + n)$.

Beweis

$T(n, m)$: Erwartungswert der Laufzeit des Algorithmus für Graphen mit n Knoten und m Kanten.

1. $G_1 \leftarrow B(B(B(G)))$: Laufzeit ist $O(m + n)$.
   G_1 hat höchstens $n/8$ Knoten und m Kanten.
2. $G_2 \leftarrow \text{RandomSample}(G_1, 1/2)$: Laufzeit ist $O(m + n)$.
   G_2 hat $\leq n/8$ Knoten und erwartete Kantenzahl $m/2$.
3. $F_2 \leftarrow \text{MSF}(G_2)$: erwartete Laufzeit ist $T(n/8, m/2)$
4. $C_2 \leftarrow \langle \textit{die } F_2\textit{-schweren Kanten in } G_1 \rangle$: Laufzeit ist $O(m + n)$.
   G_3 hat $\leq n/8$ Knoten; erwartete Kantenzahl $(n/8)/(1/2) = n/4$.
5. $F_3 \leftarrow \text{MSF}(G_3)$: erwartete Laufzeit $T(n/8, n/4)$
6. $F \leftarrow C_1 \cup F_3$: Laufzeit ist $O(n)$.

$T(n, m) \leq T(n/8, m/2) + T(n/8, n/4) + c(n + m)$.
$\rightsquigarrow T(n, m) \in O(n + m)$.