Randomisierte Algorithmen

4. Routing in Hyperwürfeln

Thomas Worsch

Fakultät für Informatik
Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2019/2020

Überblick

Überblick

4.1 Definition Hyperwürfel

- $d \geq 1$: *d-dimensionaler Hyperwürfel* $H_d = (V_d, E_d)$ mit
- Knotenmenge $V_d = \{0,1\}^d$ und
- Kantenmenge E_d: Knoten x und y verbunden, wenn Hamming-Distanz 1

4.2 Beobachtungen

- $|V_d| = N = 2^d$
- $|E_d| = d \cdot 2^{d-1} \in \Theta(N \log N)$
- H_d hat Durchmesser

4.2 Beobachtungen

- $|V_d| = N = 2^d$
- $|E_d| = d \cdot 2^{d-1} \in \Theta(N \log N)$
- H_d hat Durchmesser $d = \log N$, denn
  für $x = (x_1 x_2 \cdots x_d)$ und $y = (y_1 y_2 \cdots y_d)$

4.2 Beobachtungen

- $|V_d| = N = 2^d$
- $|E_d| = d \cdot 2^{d-1} \in \Theta(N \log N)$
- H_d hat Durchmesser $d = \log N$, denn
  für $x = (x_1 x_2 \cdots x_d)$ und $y = (y_1 y_2 \cdots y_d)$ ist

$$
\begin{array}{c}
(x_1 x_2 x_3 \cdots x_{d-1} x_d) \\
(y_1 x_2 x_3 \cdots x_{d-1} x_d) \\
(y_1 y_2 x_3 \cdots x_{d-1} x_d) \\
\vdots \\
(y_1 y_2 y_3 \cdots y_{d-1} x_d) \\
(y_1 y_2 y_3 \cdots y_{d-1} y_d)
\end{array}
$$

  ein Weg von x nach y (nach Entfernung aller Doppelten).

4.3 Problemstellung

- Knoten von H_d seien Prozessoren.
- *Routing:* Jeder Knoten x habe „Nachricht“ (oder „Paket“) vorliegen, die auf einem Pfad in H_d zu Zielknoten $f(x)$ transportiert werden muss.
- *Permutationsrouting:* $f : V \to V$ ist eine Bijektion, beschreibt also eine Permutation der Knoten.

4.3 Problemstellung

- Knoten von H_d seien Prozessoren.
- *Routing:* Jeder Knoten x habe „Nachricht“ (oder „Paket“) vorliegen, die auf einem Pfad in H_d zu Zielknoten $f(x)$ transportiert werden muss.
- *Permutationsrouting:* $f : V \to V$ ist eine Bijektion, beschreibt also eine Permutation der Knoten.
- Einschränkung: in jedem Schritt kann über jede Kante maximal ein Paket transportiert werden.
- für Staus: FIFO-Warteschlangen
- *gesucht:* für jedes Paar $(x, f(x))$ ein „Reiseplan“ (Kanten, Zeitpunkte) von x nach $f(x)$, so dass möglichst schnell alle Pakete am Ziel

4.4 Einschränkung

Zur Vermeidung einer zentralen Instanz, die die Transporte organisieren muss:

- hier nur Algorithmen, die *oblivious* bzw. *datenunabhängig* sind
- Das heißt: die Route für Paket x hängt nicht von den Routen anderer Pakete ab.
- Algorithmus also vollständig charakterisiert durch die N^2 denkbaren Pfade $P_{x,y}$

4.5 Bit-Fixing-Algorithmus

Von $x = (x_1 x_2 \cdots x_d)$ nach $y = (y_1 y_2 \cdots y_d)$ benutze

- Pfad, der sich aus

$$
\begin{aligned}
&(x_1 x_2 x_3 \cdots x_{d-1} x_d)\\
&(y_1 x_2 x_3 \cdots x_{d-1} x_d)\\
&(y_1 y_2 x_3 \cdots x_{d-1} x_d)\\
&\qquad\vdots\\
&(y_1 y_2 y_3 \cdots y_{d-1} x_d)\\
&(y_1 y_2 y_3 \cdots y_{d-1} y_d)
\end{aligned}
$$

  durch Streichen aller Doppelten ergibt.

- datenunabhängig

4.6 „Matrix-Transposition“ mit dem Bit-Fixing-Algorithmus

- $f(x_1 \cdots x_{d/2} x_{d/2+1} \cdots x_d) = (x_{d/2+1} \cdots x_d x_1 \cdots x_{d/2})$
- Problem: fixiere beliebiges Bitmuster $z_{d/2+1} \cdots z_d$.
- Transport der $2^{d/2} = \sqrt{N}$ Pakete
  von allen Knoten $x_1 \cdots x_{d/2} z_{d/2+1} \cdots z_d$
  über gleichen Knoten $z_{d/2+1} \cdots z_d z_{d/2+1} \cdots z_d$
- pro Schritt maximal $d = \log N$ Pakete transportierbar
- also untere Schranke von $\sqrt{N}/\log N$ Schritten
  - viel größer als der Durchmesser $\log N$

4.7 Satz

Zu jedem deterministischen datenunabhängigen Algorithmus für Permutationsrouting in einem Graphen mit N Knoten, die alle Ausgangsgrad d haben, gibt es eine Permutation, für die der Algorithmus $\Omega(\sqrt{N}/d)$ Schritte benötigt.

4.8 Beweis

- A: deterministischer datenunabhängiger Algorithmus für Permutationsrouting
- $P_{u,v}$: von A für ein Paket von u nach v gewählter Pfad
- Beweisidee:
  - finde eine Kante e
  - für die „große“ Mengen von Quellknoten $U' = \{u_1, \ldots, u_k\}$ und zugehörigen Zielknoten $V' = \{v_1, \ldots, v_k\}$ existieren
  - so dass alle Pfade P_{u_i,v_i} über e führen.
- Da in jedem Schritt über e nur je ein Paket in jede Richtung transportiert kann, folgt untere Schranke von $k/2$.
- Wir werden sehen, dass man $k = \sqrt{N}/d$ solche Pfade finden kann.

4.8 Beweis (2)

- Betrachte beliebigen Knoten v und alle $N-1$ Pfade $P_{u,v}$ von anderen u zu ihm.
- Für $k \geq 1$ sei $S_k(v)$ die Menge aller Kanten, durch die mindestens k dieser Pfade führen.
- $S_k^*(v)$ sei die Menge aller Endknoten der Kanten in $S_k(v)$.
- Offensichtlich ist $|S_k^*(v)| \leq 2|S_k(v)|$.

4.8 Beweis (2)

- Betrachte beliebigen Knoten v und alle $N-1$ Pfade $P_{u,v}$ von anderen u zu ihm.
- Für $k \geq 1$ sei $S_k(v)$ die Menge aller Kanten, durch die mindestens k dieser Pfade führen.
- $S_k^*(v)$ sei die Menge aller Endknoten der Kanten in $S_k(v)$.
- Offensichtlich ist $|S_k^*(v)| \leq 2|S_k(v)|$.
- Da $N-1$ Pfade zu v hinführen, aber nur d Kanten, müssen über mindestens eine dieser Kanten mindestens $\frac{N-1}{d}$ Pfade führen.
- Also ist für $k \leq \frac{N-1}{d}$ auch $v \in S_k^*(v)$.
- Von nun an stets $k \leq \frac{N-1}{d}$ und daher $v \in S_k^*(v)$.

4.8 Beweis (3)

- Zeige:

$$|V \setminus S_k^*(v)| \leq (d-1)(k-1)|S_k^*(v)| \tag{1}$$

4.8 Beweis (3)

- Zeige:

$$|V \setminus S_k^*(v)| \leq (d-1)(k-1)|S_k^*(v)| \tag{1}$$

- Wegen $v \in S_k^*(v)$ führt jeder Pfad $P_{u,v}$ von einem Knoten $u \in V \setminus S_k^*(v)$ „nach $S_k^*(v)$ hinein“.
- Für jeweils erstes „Hineinführen“ über eine Kante $(w, w') \in V \setminus S_k^*(v) \times S_k^*(v)$ gilt:
  - Es gibt $|S_k^*(v)|$ mögliche w'.
  - zu jedem w' maximal $d-1$ Kanten „von außerhalb“
  - über solche Kante (w, w') führen höchstens $k-1$ Pfade
- folglich „außerhalb“ von $S_k^*(v)$, also in $V \setminus S_k^*(v)$, nur in (1) behauptete Anzahl von Knoten

4.8 Beweis (4)

- Folglich gilt für jedes $k \leq (N-1)/d$:

$$\begin{aligned} N &= |V \setminus S_k^*(v)| + |S_k^*(v)| \\ &\leq (d-1)(k-1)|S_k^*(v)| + |S_k^*(v)| \\ &\leq ((d-1)(k-1)+1) \cdot 2|S_k(v)| \\ &\leq 2kd|S_k(v)| \end{aligned}$$

und daher $$|S_k(v)| \geq \frac{N}{2kd}$$

- Summation über alle Knoten ergibt

$$\sum_{v \in V} |S_k(v)| \geq \frac{N^2}{2kd} \,.$$

4.8 Beweis (5)

- Da es aber maximal $Nd/2$ Kanten im Graphen gibt, muss mindestens eine Kante in mindestens

$$\frac{N^2/2kd}{Nd/2} = \frac{N}{kd^2}$$

  Mengen $S_k(v)$ vorkommen.
- wähle k so, dass dieser Wert wieder k ist, also $k = \sqrt{N}/d$.
- k ist kleiner gleich $(N-1)/d$
- Es sei nun e eine Kante, die in $k = \sqrt{N}/d$ Mengen $S_k(v_1), \ldots, S_k(v_k)$ liegt.

4.8 Beweis (6)

- Es sei nun e eine Kante in $k = \sqrt{N}/d$ Mengen $S_k(v_1), \ldots, S_k(v_k)$
- Es sei u_1 einer der k Knoten, für die P_{u_1,v_1} über e führt.
- Nach Wahl von k gibt es zu jedem v_i mindestens k Knoten, für die P_{u_i,v_i} über e führt.
- Daher können wir induktiv u_i festlegen, indem wir verlangen, dass u_i einer der mindestens $k - (i-1)$ Knoten ungleich $u_1, \ldots, u_{i-1}$ sei, für die P_{u_i,v_i} über e führt.
- Also gibt es mindestens $k = \sqrt{N}/d$ Pfade $P_{u_1,v_1}, \ldots, P_{u_k,v_k}$, die alle über die gleiche Kante e führen.

4.9 Bemerkung

- *Frage:* Gibt es zumindest einen deterministischen datenunabhängigen Algorithmus, für den nur sehr wenige Permutationen tatsächlich „sehr schlimm“ sind?
- *Antwort:* Für jeden deterministischen datenunabhängigen Algorithmus gibt es sogar $(\sqrt{N}/d)!$ Permutationen, die mindestens $\sqrt{N}/2d$ Routingschritte nötig machen.

Überblick

4.10 Satz (Markov-Ungleichung)

Es sei Y eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbf{E}[Y]$,
die nur nichtnegative Werte annehme.
Dann gilt für alle $t, k \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathbf{P}(Y \geq t) \leq \frac{\mathbf{E}[Y]}{t} \qquad \text{bzw.} \quad \mathbf{P}(Y \geq k\mathbf{E}[Y]) \leq \frac{1}{k}\,.$$

4.11 Beweis

- betrachte Zufallsvariable

$$X = \begin{cases} 0 & \text{falls } Y < t \\ t & \text{falls } Y \geq t \end{cases}$$

- dann $X \leq Y$ und $\mathbf{E}[X] \leq \mathbf{E}[Y]$
- also

$$t \cdot \mathbf{P}(Y \geq t) \leq \mathbf{E}[Y]$$

4.12 Satz (Chebyshev-Ungleichung)

Es sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ_X und Standardabweichung σ_X. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathbf{P}(|X - \mu_X| \geq t\sigma_X) \leq \frac{1}{t^2}$$

bzw.

$$\mathbf{P}(|X - \mu_X| \geq t) \leq \frac{\sigma_X^2}{t^2} \,.$$

4.13 Beweis

- Zufallsvariable $Y = (X - \mu_X)^2$ hat Erwartungswert $\mu_Y = \sigma_X^2$.
- Nach der Markov-Ungleichung:

$$\mathbf{P}\big(Y \geq t^2 \mu_Y\big) \leq \frac{1}{t^2} \ .$$

- Die linke Seite ist aber

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\big(Y \geq t^2 \mu_Y\big) &= \mathbf{P}\big((X - \mu_X)^2 \geq t^2 \sigma_X^2\big) \\ &= \mathbf{P}(|X - \mu_X| \geq t\sigma_X) \ . \end{aligned}$$

Überblick

4.14 Problemstellung

- Im folgenden stets: $X_1, \ldots, X_n$ *unabhängige* 0-1-Zufallsvariablen mit $\mathbf{P}(X_i = 1) = p_i$ für $1 \leq i \leq n$.
- Solche Zufallsvariablen heißen auch *Poisson-Versuche*.
- Außerdem sei $X = X_1 + \cdots + X_n$ und $\mu = \mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i$.
- Falls alle $p_i = p$ sind, spricht man auch von *Bernoulli-Versuchen*, X ist dann binomialverteilt.
- *Gesucht:*
  - Abschätzungen für Abweichungen von X vom Erwartungswert,
  - die besser sind als die aus Markov- und Chebyshev-Ungleichung.

4.15 Satz

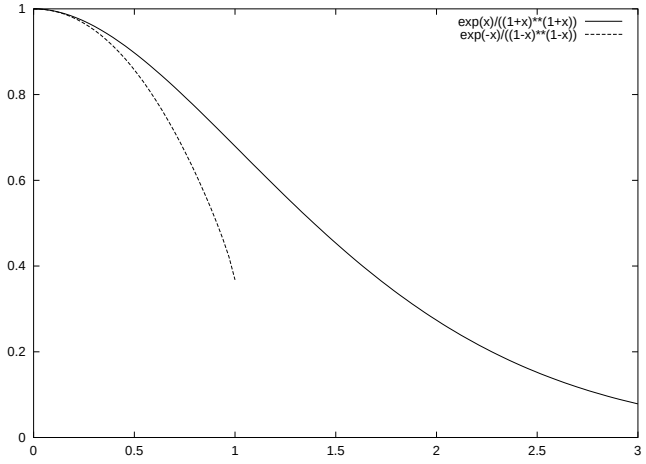
Mit den Bezeichnungen wie in Punkt 4.14 gilt:

- für $0 < \delta$:

$$\mathbf{P}(X \geq (1+\delta)\mu) \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{(1+\delta)}}\right)^{\mu}$$

- für $1 > \delta > 0$ also $0 < 1-\delta < 1$:

$$\mathbf{P}(X \leq (1-\delta)\mu) \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{(1-\delta)}}\right)^{\mu}$$


exp(x)/((1+x)**(1+x))
exp(-x)/((1-x)**(1-x))
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

4.16 Beobachtung

- Für $x \geq 0$ ist $1 + x \leq e^x$.

4.17 Beweis (von Satz 4.15)

- sei t positiv; Markov-Ungleichung liefert:

$$\mathbf{P}(X \geq (1+\delta)\mu) = \mathbf{P}\left(e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}\right) \leq \frac{\mathbf{E}\left[e^{tX}\right]}{e^{t(1+\delta)\mu}}$$

- mit den X_i sind auch die e^{tX_i} unabhängig:

$$\mathbf{E}\left[e^{tX}\right] = \mathbf{E}\left[e^{t\sum X_i}\right] = \mathbf{E}\left[\prod e^{tX_i}\right] = \prod \mathbf{E}\left[e^{tX_i}\right]$$

- $\mathbf{E}\left[e^{tX_i}\right] = p_i \cdot e^t + (1-p_i)\cdot 1 = 1 + p_i(e^t - 1) \leq e^{p_i(e^t-1)}$
- $\mathbf{P}(X \geq (1+\delta)\mu) \leq \dfrac{\prod e^{p_i(e^t-1)}}{e^{t(1+\delta)\mu}} = \dfrac{e^{\sum p_i(e^t-1)}}{e^{t(1+\delta)\mu}}$

$$= \frac{e^{\mu(e^t-1)}}{e^{t(1+\delta)\mu}} = \left(\frac{e^{(e^t-1)}}{e^{t(1+\delta)}}\right)^{\mu}$$

- wähle $t = \ln(1+\delta)$ (positiv!)

4.17 Beweis (2)

Fall $\mathbf{P}(X \leq (1-\delta)\mu) \leq \cdots$ für $1 > \delta \geq 0$

- analoge Rechnung
- wähle $t = -\ln(1-\delta)$ (positiv!)

4.18 Bemerkung

- In Satz 4.15 von Interesse:

$$F(\mu, \delta) = \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{(1+\delta)}} \right)^{\mu} \qquad \text{für } \delta > -1$$

- Betrachte statt dessen:

$$\ln(F(\mu, \delta)^{1/\mu}) = \delta - (1+\delta)\ln(1+\delta) = f(\delta)$$

4.19 Lemma

1. Für $-1 < x \leq 0$ gilt: $f(x) \leq -x^2/2$.
2. Für $0 < x$ gilt: $-x^2/2 \leq f(x)$.
3. Die Funktion $g(x) = f(x)/x^2$ ist monoton wachsend.
4. Für $0 < \delta < x$ gilt: $f(\delta) \leq g(x)\delta^2$.
5. Für $0 < \delta < 2e - 1$ gilt: $f(\delta) \leq -\delta^2/5$.
6. Für $0 < \delta < 1$ gilt: $f(\delta) \leq -\delta^2/3$.

Beweis: rechnen

4.21 Korollar

- Für $0 \leq \delta \leq 2e - 1$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \geq (1+\delta)\mu) \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{(1+\delta)}}\right)^{\mu} \leq e^{-\delta^2\mu/5}$$

- Für $0 \leq \delta \leq 1$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \geq (1+\delta)\mu) \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{(1+\delta)}}\right)^{\mu} \leq e^{-\delta^2\mu/3}$$

- Für $1 > \delta \geq 0$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \leq (1-\delta)\mu) \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{(1-\delta)}}\right)^{\mu} \leq e^{-\delta^2\mu/2}$$

4.23 Korollar

- Für $0 \leq \delta$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \geq (1+\delta)\mu) \leq \left(\frac{e}{1+\delta}\right)^{(1+\delta)\mu}$$

- Für $2e - 1 \leq \delta$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \geq (1+\delta)\mu) \leq 2^{-(1+\delta)\mu}$$

Beweis: rechnen

Überblick

4.25 Algorithmus

1. Für jedes Paket b_x in Startknoten x wird unabhängig und gleichverteilt zufällig ein Zwischenknoten z_x gewählt.
2. Unter Verwendung des Bit-Fixing-Algorithmus wird jedes b_x von x nach z_x transportiert.
3. Unter Verwendung des Bit-Fixing-Algorithmus wird jedes b_x von z_x zu Zielknoten $f(x)$ transportiert.

4.26 Satz

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass jedes Paket seinen Zwischenknoten nach spätestens $7d$ Schritten erreicht hat, ist mindestens $1 - 2^{-5d}$.
2. Die Wahrscheinlichkeit, dass jedes Paket sein Ziel nach spätestens $14d$ Schritten erreicht hat, ist mindestens $1 - 2/N^5$.
3. Für $d \geq 3$ ist der Erwartungswert für die Laufzeit von Alg. 4.25 kleiner oder gleich $14d + 1$.

4.27 Lemma

- x Startknoten, beliebig aber fest,
  z_x zufällig gewählt
- $\rho_x = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$: „Bit-Fixing-Pfad“ von x nach z_x
- „$\rho_y \cap \rho_x$“ : Menge der gemeinsamen Kanten zweier Pfaden
- $S_x = \{b_y \mid y \neq x \wedge \rho_y \cap \rho_x \neq \emptyset\}$
- t: tatsächlicher Ankuftszeitpunkt von b_x in z_x,
  also aufgelaufene „Verspätung“ $\ell_x = t - k$
- *Behauptung:* $\ell_x \leq |S_x|$.

4.28 Beweis

- Zwei Pfade ρ_x und ρ_y mögen Kante gemeinsam haben.
- *Behauptung 1:* Sobald sich Pfade getrennt haben, führen sie nicht wieder zusammen.
- betrachte Knoten u und v auf Bit-Fixing-Pfad von $x \rightsquigarrow z_x$
- der Weg von u nach v ist eindeutig festgelegt (bit fixing!)
- unabhängig davon
  - von wo man zu u gekommen ist und
  - wohin es von v aus weiter geht

4.28 Beweis (2)

Sprechweisen:

- Paket $b_y \in S_x$ *„verlässt“* ρ_x,
  wenn es zum letzten Mal eine Kante von ρ_x benutzt.
- dieser Zeitpunkt für jedes b_y eindeutig (Behauptung 1)
- Ein Paket habe beim Transport über e_i von ρ_x *„Verspätung“* ℓ,
  falls Transport erst in Schritt $t = i + \ell$
- Für b_x ist das wirklich die Zeitdifferenz zwischen frühest möglicher Ankunft $t = i$ und tatsächlicher Ankunft $t = i + \ell$ am Endpunkt von e_i
- Für andere $b_y \in S_x$ ist das nur „irgendeine“ Zahl.

4.28 Beweis (3)

- *Behauptung 2:* wenn sich die Verspätung von b_x von ℓ auf $\ell + 1$ erhöht, verlässt ein Paket $b_y \in S_x$ den Pfad ρ_x mit Verspätung ℓ.
- Behauptung 1: das passiert für jedes Paket in S_x nur einmal
- Behauptung 2: *also* $\ell_x \leq |S_x|$.

4.28 Beweis (4)

- Betrachte e_i, die von Paket b_x zu Zeitpunkt t benutzt werden möchte aber nicht kann, wegen anderem b_y
- Verspätung von b_x erhöht sich von $\ell = t - i$ auf $\ell + 1$, und das kann auch nur so passieren.
- „Verspätung“ von b_y bei Benutzung von e_i ist $t - i = \ell$
- Sei t' letzter Zeitpunkt, zu dem ein Paket b aus S_x Verspätung ℓ hat.
- sei $e_{j'}$ die Kante, die b benutzen „will“; also ist $t' - j' = \ell$.
- Dann verlässt auch ein Paket in S_x zu t' Pfad ρ_x:
  - Da b Kante $e_{j'}$ benutzen „will“,
  - wird ein Paket b' sicher Kante $e_{j'}$ benutzen.
  - Es hat offensichtlich Verzögerung $t' - j' = \ell$.

4.28 Beweis (5)

- Würde b' Pfad ρ_x *nicht* verlassen, dann gäbe es b'', das Kante $e_{j'+1}$ zum Zeitpunkt $t' + 1$ mit Verzögerung $t' + 1 - (j' + 1) = \ell$ benutzen würde.
- Widerspruch zur Wahl von t':
  letzter Zeitpunkt, zu dem ein Paket Verspätung ℓ hat.
- Also verlässt b' Pfad ρ_x zum Zeitpunkt t'.
- Wir schreiben daher nun b' zu, bei Paket b_x die Erhöhung der Verspätung von ℓ auf $\ell + 1$ verursacht zu haben.
- Da b' den Pfad ρ_x verlässt und nie wieder betritt, wird so keinem Paket doppelt Verspätungserhöhung angerechnet.
- Also ist $\ell_x \leq |S_x|$.

4.29 Lemma

- Betrachte Zufallsvariable $H_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \rho_x \cap \rho_y \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.
- Dann gilt:
  1. Die Gesamtverspätung von b_x beim Eintreffen in z_x ist $\ell_x \leq \sum_{y \neq x} H_{xy}$.
  2. $\mathbf{E}\left[\sum_{y \neq x} H_{xy}\right] \leq d/2$.
  3. $\mathbf{P}(\ell_x \geq 6d) \leq 2^{-6d}$.

4.30 Beweis

1. Lemma von eben: $\ell_x \leq |S_x| = \sum_{y \neq x} H_{xy}$.
2. Betrachte irgendein $\rho_x = (e_1, \ldots, e_k)$ mit $k \leq d$.
   - Die Zufallsvariable $T(e)$ gebe die Anzahl Pfade ρ_y mit $y \neq x$ an, die über eine Kante e führen.
   - Dann ist

     $$\sum_{y \neq x} H_{xy} \leq \sum_{i=1}^{k} T(e_i)$$

     und

     $$\mathbf{E}\left[\sum_{y \neq x} H_{xy}\right] \leq \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}\left[T(e_i)\right]$$

   - Zeige:

     $$\mathbf{E}\left[T(e_i)\right] \leq 1/2$$

     (wegen $k \leq d$ folgt die Behauptung)

4.30 Beweis (2)

- O. B. d. A. führe e_i von $(x_1 \cdots x_r 0 x_{r+2} \cdots x_d)$ zu $(x_1 \cdots x_r 1 x_{r+2} \cdots x_d)$.
- Bit-Fixing-Algorithmus: Ein Pfad von y nach z_y führt genau dann über e_i, wenn gilt:
  - $y = u_1 \cdots u_r 0 x_{r+2} \cdots x_d$ und
  - z_y beginnt mit $x_1 \cdots x_r 1$
- Solche $y \neq x$ gibt es $2^r - 1$.
- Zwischenknoten zufällig gleichverteilt und unabhängig gewählt,
- also ist für jedes y die Wahrscheinlichkeit für das Präfix $x_1 \cdots x_r 1$ in z_y stets $2^{-(r+1)}$.

4.30 Beweis (3)

Also ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[T(e_i)\right] &= \sum_{y \neq x} \mathbf{P}\left(\rho_y \text{ benutzt } e_i\right) \\
&= \sum_{u_1 \cdots u_r \neq x_1 \cdots x_r} \mathbf{P}\left(\rho_{u0x_{r+2}\cdots x_d} \text{ benutzt } e_i\right) \\
&= (2^r - 1) \cdot 2^{-(r+1)} \leq 1/2
\end{aligned}$$

4.30 Beweis (4)

- wegen der ersten beiden Punkte: $\mathbf{E}[\ell_x] \leq d/2$
- man vergesse die $T(e_i)$ und denke wieder an die H_{xy}
  - also Chernoff-Schranken anwendbar
- da $2e - 1 < 11$, liefert Korollar 4.23

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\ell_x \geq 6d) &\leq \mathbf{P}\left(\sum H_{xy} \geq 6d\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\sum H_{xy} \geq 12 \cdot d/2\right) \\
&\leq \mathbf{P}\left(\sum H_{xy} \geq (1+11)\mathbf{E}\left[\sum H_{xy}\right]\right) \\
&\leq 2^{-12d/2} = 2^{-6d}
\end{aligned}$$

4.26 Satz (zur Erinnerung)

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass jedes Paket seinen Zwischenknoten nach spätestens $7d$ Schritten erreicht hat, ist mindestens $1 - 2^{-5d}$.
2. Die Wahrscheinlichkeit, dass jedes Paket sein Ziel nach spätestens $14d$ Schritten erreicht hat, ist mindestens $1 - 2/N^5$.
3. Für $d \geq 3$ ist der Erwartungswert für die Laufzeit von Alg. 4.25 kleiner oder gleich $14d + 1$.

4.31 Beweis von Satz 4.26

1. Mit Wahrscheinlichkeit $1 - 2^{-5d}$ alle Pakete nach $\leq 7d$ Schritten am Zwischenknoten:
   - Wahrscheinlichkeit, dass Paket um $\geq 6d$ Schritte verzögert wird, ist $\leq 2^{-6d}$.
   - $N = 2^d$ Pakete unabhängig voneinander transportiert: Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens eines um $\geq 6d$ Schritte verzögert wird, ist $\leq 2^d \cdot 2^{-6d} = 2^{-5d}$.
   - Zusätzlich jedes Paket über maximal d Kanten transportiert: Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens ein Paket erst nach $\geq 7d$ Schritten am Ziel ist, $\leq 2^{-5d}$.
   - Also: mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - 2^{-5d}$ alle Pakete nach $\leq 7d$ Schritten am Zwischenknoten.

4.31 Beweis von Satz 4.26 (2)

2. Mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1 - 2/N^5$ alle Pakete nach $\leq 14d$ Schritten am Ziel:
   - Zweite Phase: Umkehrung der ersten Phase.
   - Deshalb gilt getrennt hierfür die gleiche Analyse.
   - Damit bei Nacheinanderausführung beider Phasen durch ihre Überlappung keine zusätzlichen nachteiligen Effekte auftreten, Erweiterung der erste Phase:
   - Jedes Paket verharrt im Zwischenknoten, bis insgesamt seit Beginn des Routing $7d$ Schritte vergangen sind.
   - Wahrscheinlichkeit, dass alles nach $\leq 14d$ Schritten erledigt, mindestens $(1 - 2^{-5d})(1 - 2^{-5d}) = 1 - 2/N^5 + 1/N^{10} \geq 1 - 2/N^5$

4.31 Beweis von Satz 4.26 (3)

3. Für $d \geq 3$ ist die erwartete Laufzeit $\leq 14d + 1$.
   - Die größte Laufzeit beschränkt durch Zeit für „sequentielles Routing“. Zeitbedarf dafür $\leq 2dN$.
   - Für $d \geq 3$ ist $N \geq 8$, also $14d \leq 2dN$,
   - also ist dann der Erwartungswert für die Laufzeit

$$
\begin{aligned}
&\leq (1 - 2/N^5)14d + (2/N^5) \cdot 2dN \\
&= 14d - 28d/N^5 + 4d/N^4 \\
&\leq 14d - 0 + 1/N^2 \\
&\leq 14d + 1
\end{aligned}
$$

Überblick

Die probabilistische Methode (1)

- Tragweite zuerst von Erdős erkannt
- *Nachweis der Existenz* gewisser Objekte

- Variante 1: Zufallsvariable X
  - hat reelle numerische Werte
  - $\mathbf{E}[X]$ existiert

Die probabilistische Methode (1)

- Tragweite zuerst von Erdős erkannt
- *Nachweis der Existenz* gewisser Objekte

- Variante 1: Zufallsvariable X
  - hat reelle numerische Werte
  - $\mathbf{E}[X]$ existiert

  dann nimmt X
  - mindestens einen Wert an, der nicht kleiner als $\mathbf{E}[X]$ ist, und einen Wert, der nicht größer als $\mathbf{E}[X]$ ist.

Die probabilistische Methode (1)

- Tragweite zuerst von Erdős erkannt
- *Nachweis der Existenz* gewisser Objekte

- Variante 1: Zufallsvariable X
  - hat reelle numerische Werte
  - $\mathbf{E}[X]$ existiert

  dann nimmt X
  - mindestens einen Wert an, der nicht kleiner als $\mathbf{E}[X]$ ist, und einen Wert, der nicht größer als $\mathbf{E}[X]$ ist.
  - Also *existieren* Ereignisse, für die X diese Werte annimmt.

Die probabilistische Methode (2)

- Variante 2: endliches nichtleeres Universum U
  - mit Objekten O
  - Eigenschaft P, die Objekte haben können

Die probabilistische Methode (2)

- Variante 2: endliches nichtleeres Universum U
  - mit Objekten O
  - Eigenschaft P, die Objekte haben können
- Wähle zufällig ein Objekt O aus U aus.
  Wahrscheinlichkeit p, dass O Eigenschaft P hat?

Die probabilistische Methode (2)

- Variante 2: endliches nichtleeres Universum U
  - mit Objekten O
  - Eigenschaft P, die Objekte haben können
- Wähle zufällig ein Objekt O aus U aus.
  Wahrscheinlichkeit p, dass O Eigenschaft P hat?
  - Wenn $p > 0$ ist,

Die probabilistische Methode (2)

- Variante 2: endliches nichtleeres Universum U
  - mit Objekten O
  - Eigenschaft P, die Objekte haben können
- Wähle zufällig ein Objekt O aus U aus.
  Wahrscheinlichkeit p, dass O Eigenschaft P hat?
  - Wenn $p > 0$ ist,
    dann muss in U ein O mit $P(O)$ *existieren*.

Überblick

Plan

- *Sprechweisen:*
  - *RPH-Algorithmus*: datenunabhängiger randomisierter Algorithmus für Permutationsrouting in Hyperwürfeln
  - RPH-Algorithmus *schnell:* erwartete Laufzeit in $O(d)$.
- *Bisher:*
  - Algorithmus 4.25 nutzt $\Theta(Nd)$ Zufallsbits und ist schnell
  - Datenunabhängige deterministische Algorithmen nutzen 0 Zufallsbits und sind nie schnell. (Satz 4.7)
- *Frage:* Gibt es RPH-Algorithmen gibt, die weniger als $\Theta(Nd)$ Zufallsbits benutzen und trotzdem schnell sind?

Plan

- *Sprechweisen:*
  - *RPH-Algorithmus*: datenunabhängiger randomisierter Algorithmus für Permutationsrouting in Hyperwürfeln
  - RPH-Algorithmus *schnell:* erwartete Laufzeit in $O(d)$.
- *Bisher:*
  - Algorithmus 4.25 nutzt $\Theta(Nd)$ Zufallsbits und ist schnell
  - Datenunabhängige deterministische Algorithmen nutzen 0 Zufallsbits und sind nie schnell. (Satz 4.7)
- *Frage:* Gibt es RPH-Algorithmen gibt, die weniger als $\Theta(Nd)$ Zufallsbits benutzen und trotzdem schnell sind?
- *Ziel:* $\Theta(d)$ Zufallsbits
  - notwendig und
  - *in gewissem Sinne* „hinreichend“, um sein schnell zu können

4.32 Satz

Wenn ein RPH-Algorithmus in Würfeln mit $N = 2^d$ Knoten nur k Zufallsbits benutzt, dann ist seine erwartete Laufzeit in $\Omega(2^{-k}\sqrt{N}/d)$.

4.33 Beweis

- Fasse RPH-Algorithmus R auf als Wahrscheinlichkeitsverteilung über 2^k deterministischen Algorithmen.
- Dann wird mindestens ein det. Alg A mit Wahrscheinlichkeit $\geq 2^{-k}$ ausgewählt.
- Es sei x eine Eingabe, für die A Laufzeit $\Omega(\sqrt{N}/d)$ hat.
- Betrachte die Bearbeitung von x durch R:
  - Mit Wahrscheinlichkeit $\geq 2^{-k}$ wird R wie A arbeiten.
  - Also ist der Erwartungswert für die Laufzeit von R mindestens $\Omega(2^{-k}\sqrt{N}/d)$.

4.34 Korollar

Jeder schnelle RPH-Algorithmus muss $\Omega(d)$ Zufallsbits verwenden.

4.35 Beweis

- Es sei c irgendeine positive Konstante.
- Damit $2^{-k}\sqrt{N}/d \leq cd$ ist, muss gelten:
  - $2^k \geq \sqrt{N}/(cd^2)$, also
  - $k \geq \log\sqrt{N} - O(\log d)$, also
  - $k \in \Omega(d)$.

4.36 Satz

Für jedes d gibt es einen schnellen RPH-Algorithmus,
der $3d$ Zufallsbits benötigt und erwartete Laufzeit $22d$ hat.

4.36 Satz

Für jedes d gibt es einen schnellen RPH-Algorithmus,
der $3d$ Zufallsbits benötigt und erwartete Laufzeit $22d$ hat.

Achtung! Hier wird **nicht** die Existenz *eines* RPH-Algorithmus für Hyperwürfel *aller* Größen zugesichert wird.

4.37 Beweis

- $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_t)$: Liste det. PH-Algorithmen
- $\mathcal{A} \rightsquigarrow$ rand. $R_{\mathcal{A}}$ (zufällig gleichverteilt ein $A_i \in \mathcal{A}$)
- $\mathcal{A}$ *effizientes N-Schema*, falls für jede N-Permutation
  $\mathbf{E}\,[\text{Laufzeit}] \leq 22d$

4.37 Beweis

- $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_t)$: Liste det. PH-Algorithmen
- $\mathcal{A} \rightsquigarrow$ rand. $R_{\mathcal{A}}$ (zufällig gleichverteilt ein $A_i \in \mathcal{A}$)
- $\mathcal{A}$ *effizientes N-Schema*, falls für jede N-Permutation $\mathbf{E}\,[\text{Laufzeit}] \leq 22d$
- *Zeige:* es ex. effizientes N-Schema mit $t = N^3$ Algs.
- $R_{\mathcal{A}}$ braucht nur $\log t \in O(\log N) = O(d)$ Zufallsbits

- Nachweis der Existenz eines so kleinen effizienten N-Schemas mittels der probabilistischen Methode

4.37 Beweis (2)

- Fasse Algorithmus 4.25 als Menge $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_{N^N}\}$ von N^N deterministischen PH-Algorithmen auf.
- Zufallsexperiment: aus $\mathcal{B}$ zufällig (mit Zurücklegen) Liste $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_{N^3})$ von N^3 Algorithmen $A_i = B_{j_i}$ auswählen
- *Zeige:* $\mathcal{A}$ ist effizientes N-Schema mit Wahrscheinlichkeit echt größer Null.
- Also existiert ein effizientes N-Schema.

4.37 Beweis (3)

- π_i: die $N!$ Permutationen
- Det. PH-Algorithmus A heiße *gut* für π_i, wenn er π_i in höchstens $14d$ Schritten routet, sonst *schlecht*.
- Satz 4.26.2. sagt: Für jedes π_i ist ein Bruchteil von $\leq 1/N$ aller B_j schlecht für π_i.
- zunächst ein beliebiges π_i fixiert.
- Erwartungswert für die Anzahl der für π_i schlechten Algorithmen in $\mathcal{A}$ ist $\leq N^3/N = N^2$
- X_j sei die 0-1-Zufallsvariable mit $X_j = 1$, gdw. A_j schlecht für π_i.
- Also: $\mu = \mathbf{E}\left[\sum_{j=1}^{N^3} X_j\right] \leq N^2$.

4.37 Beweis (4)

- $\mu = \mathbf{E}\left[\sum_{j=1}^{N^3} X_j\right] \leq N^2$
- sei $c = N^2/\mu \geq 1$
- X_j unabhängige Zufallsvariablen
- Obere Schranke für $\mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{N^3} X_j > 4N^2\right)$ mittels Chernoff-Schranke (Kor. 4.23):

$$\mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{N^3} X_j > (1+3)N^2\right) < \left(\frac{1}{e}\right)^{N^2} = e^{-N^2} .$$

(siehe nächste Folie)

- Ereignis E_i: $> 4N^2$ Algorithmen in $\mathcal{A}$ schlecht für π_i.
- Also $\mathbf{P}(E_i) < e^{-N^2}$.

4.37 Beweis (5)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{N^3} X_j > (1+3)N^2\right) &= \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{N^3} X_j > (1+\delta)c\mu\right) \\
&\leq \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{N^3} X_j > (1+c\delta)\mu\right) \\
&\leq \left(\frac{e^{c\delta}}{(1+c\delta)^{1+c\delta}}\right)^{\mu} \leq \left(\frac{e^{c\delta}}{(1+c\delta)^{c\delta}}\right)^{\mu} \\
&= \left(\frac{e}{1+c\delta}\right)^{c\delta\mu} \leq \left(\frac{e}{1+3}\right)^{c\delta\mu} \\
&= \left(\frac{e}{4}\right)^{3N^2} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{N^2}
\end{aligned}
$$

4.37 Beweis (6)

- Wahrscheinlichkeit, dass $\mathcal{A}$ für mindestens ein π_i schlecht:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{N!} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N!} \mathbf{P}(E_i) \leq N! \cdot e^{-N^2} < 1 \ .$$

- Also: Wahrscheinlichkeit, dass von den Algorithmen in $\mathcal{A}$ für jede Permutation höchstens $4N^2$ schlecht sind, ist echt größer 0. Also existiert ein solches $\mathcal{A}$.

4.37 Beweis (7)

- *Zeige:* dieses $\mathcal{A}$ sogar ein effizientes N-Schema.
- Es sei π_i beliebig.
- Mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - (4N^2/N^3) = 1 - 4/N$ wird $R_{\mathcal{A}}$ diese Permutation in $\leq 14d$ Schritten durchführen. Andernfalls werden höchstens $2dN$ Schritte benötigt.
- Also Erwartungswert für die Laufzeit höchstens

$$(1 - \frac{4}{N})14d + \frac{4}{N}2dN \leq 22d \ .$$

4.38 Bemerkung

- Zeige: Für hinreichend große N gilt: $N! \cdot e^{-N^2} < 1$.
- Stirlingsche Formel:

$$\begin{aligned} N! &= \sqrt{2\pi N}\frac{N^N}{e^N}(1+h(N)) \text{ mit} \\ h(N) &= \frac{1}{12N} + \frac{1}{288N^2} - \frac{139}{5140N^3} \pm \cdots \in O(\frac{1}{N}) \end{aligned}$$

- Also:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N!}{e^{N^2}} = \lim_{N\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi N}\cdot N^N}{e^N \cdot e^{N^2}} = \lim_{N\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi N}\cdot e^{N\log N}}{e^N \cdot e^{N^2}} = 0$$

- Genaueres Nachrechnen ergibt, dass schon für $N \geq 4$ gilt: $N! \cdot e^{-N^2} < 1$.

4.39 Bemerkung

- Satz 4.36 behauptet nur die *Existenz* eines – noch dazu *nichtuniformen* – schnellen RPH-Algorithmus, der nur $O(d)$ Zufallsbits braucht.
- Schwieriger: man gebe explizit RPH-Algorithmen an, die möglichst wenige Zufallsbits benötigen.
- Bislang beste Lösung: uniform $\Theta(d^2)$ Zufallsbits.
- Aufgabe: Man senke diesen Wert.

Zusammenfassung

- Chernoff-Schranken
- die probabilistische Methode
- Routing in Hyperwürfeln:
  - deterministisch ist der schlimmste Fall immer schlimm
  - randomisiert im Erwartungswert immer harmlos
    - aber eben nur der Erwartungswert