

Aufgaben zu Kapitel 10 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

Aufgabe 10.1

Für zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen \mathbf{p} und \mathbf{q} über einer Menge S haben wir die totale Variationsdistanz so definiert:

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|_{tv} = \frac{1}{2} \sum_{j \in S} |\mathbf{p}_j - \mathbf{q}_j|.$$

Man zeige:

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|_{tv} = \max_{T \subseteq S} |\mathbf{p}(T) - \mathbf{q}(T)|$$

wobei $\mathbf{p}(T)$ definiert ist als $\mathbf{p}(T) = \sum_{j \in T} \mathbf{p}_j$.

Aufgabe 10.2

Die Variationsdistanz einer Markov-Kette war definiert als

$$\Delta(t) = \max_{\mathbf{p}} \|\mathbf{p}P^t - \mathbf{w}\|_{tv}$$

Zeigen Sie, dass das Maximum für einen Einheitsvektor $\mathbf{p} = \mathbf{e}_i$ angenommen wird:

$$\Delta(t) = \max_i \|\mathbf{e}_i P^t - \mathbf{w}\|_{tv} = \max_i \|P_i^t - \mathbf{w}\|_{tv}$$