

Aufgaben zu Kapitel 9 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

Aufgabe 9.1

Wie in der Vorlesung sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph und $0 < \beta \leq 1$ eine reelle Zahl. Mit $d(i)$ bezeichnen wir den Grad von Knoten i und es sei $d = \max_{i \in V} d(i)$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten P_{ij} der Markov-Kette $M_{G,\beta}$ seien wie folgt definiert:

$$P_{ij} = \begin{cases} \beta/d & \text{falls } i \neq j \text{ und } (i, j) \in E \\ 1 - d(i)\beta/d & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man beweise:

1. Die Gleichverteilung ist die stationäre Verteilung von $M_{G,\beta}$.
2. Für $\beta < 1$ ist $M_{G,\beta}$ aperiodisch.
3. Für $\beta < 1$ ist $M_{G,\beta}$ reversibel.

Aufgabe 9.2

Zeigen Sie, dass die Markov-Kette des Metropolis-Algorithmus (Punkt 9.8 der Vorlesung) reversibel ist.