Aufgaben zu Kapitel 8 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

Aufgabe 8.1

a) Beweisen Sie Lemma 8.14 der Vorlesung: Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge natürlicher Zahlen mit den Eigenschaften, dass

$$M + M = \{k + \ell \mid k, \ell \in M\} \subseteq M \qquad \text{und} \qquad \gcd M = 1 \ .$$

Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\{k_0\} + \mathbb{N}_0 = \{k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots\} \subseteq M$$

b) Wie lautet wohl die Verallgemeinerung dieser Aussage für den Fall, dass $\gcd M \neq 1$ ist?

Aufgabe 8.2

Zeigen Sie: Wenn eine Markov-Kette mit Matrix $\mathbf{P}$ ergodisch ist, dann gibt es ein $k > 0$, so dass in $\mathbf{P}^k$ alle Einträge echt positiv sind.

Aufgabe 8.3

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen und es sei $(s_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ die Folge mit $s_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} x_i$.

Zeigen Sie: Wenn der Grenzwert $g = \lim_{n \to \infty} x_n$ existiert, dann exisitiert auch der Cesàro-Grenzwert $c = \lim_{k \to \infty} s_k$ und es ist $g = c$.

Aufgabe 8.4

Auf einem ansonsten leeren Schachbrett startet ein Springer in einer Ecke und macht in jedem Schritt zufällig gleichverteilt einen der jeweils legalen Schachzüge.

- Modellieren Sie das Ganze als Random Walk in einem Graphen.
- Ist der Graph zusammenhängend?
- Wieviele Kanten hat der Graph?
- Was ist der Erwartungswert für die Anzahl Schritte, bis der Springer zum ersten Mal wieder auf dem Startfeld ist?