Universität Karlsruhe (TH)
Lehrstuhl Informatik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Dr. Thomas Worsch
Matthias Schulz

23. April 2008

Einführung in die Informatik
Übungsblatt 2
– Graphen –

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie: In jedem ungerichteten schlingenfreien Graphen $U = (V, E)$ ist die Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad gerade.

b) Bonus: $\delta(U)$ sei der Minimalgrad von U, also $\delta(U) = \min\{d(x) \mid x \in V\}$.
Zeigen Sie:

1) U enthält einen wiederholungsfreien Weg der Länge $\delta(U)$.
2) Falls $\delta(U) > 1$ ist, dann enthält U einen wiederholungsfreien Kreis, der eine Länge von mindestens $\delta(U) + 1$ hat.

Aufgabe 2: Es sei $U = (V, E)$ der ungerichtete Graph mit $V = \{1, \ldots, 6\}$ und der Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie U! Ist U zusammenhängend, planar, bipartit? Falls U Ihrer Meinung nach planar ist, sollte das in der Zeichnung erkennbar sein. Falls Ihrer Meinung nach U bipartit ist, geben Sie eine Zerlegung V_1, V_2 von V an, so dass es keine Kanten innerhalb von V_1 und V_2 gibt; begründen Sie ansonsten, warum U nicht bipartit ist.

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie: Ein ungerichteter schlingenfreier Graph $U = (V, E)$ ist genau dann bipartit, wenn es zwei Mengen $V_1, V_2 \subseteq V$ gibt, so dass $V_1 \cup V_2 = V$ gilt und $\forall u, v \in V_1 : \{u, v\} \notin E$ sowie $\forall u, v \in V_2 : \{u, v\} \notin E$ gilt.

Machen Sie sich den Unterschied zur im Skript angegebenen Definition bewusst!

b) Sei $U = (V, E)$ ein bipartiter ungerichteter schlingenfreier Graph. Zeigen Sie, dass die beiden Mengen V_1, V_2 mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ und $\forall \{u, v\} \in E : u \in V_1 \iff v \in V_2$ bis auf Reihenfolge eindeutig sind, falls U zusammenhängend ist.

c) Bonus: Geben Sie einen nicht zusammenhängenden ungerichteten schlingenfreien bipartiten Graphen $U = (V, E)$ an, für den die Zerlegung in V_1, V_2 nicht eindeutig ist.

Aufgabe 4: Geben Sie zu den folgenden vier Matrizen M_i jeweils entweder einen Graphen G_i, für dessen Wegematrix $W_{G_i} = M_i$ gilt, an oder begründen Sie kurz, weshalb es keinen solchen Graphen geben kann.

a) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[`autotool`: Way-1, Way-2, Way-3, Way-4. Bestenliste: Kleinste Kantenzahl. Probieren Sie auch die `autotool`-Aufgabe Way!]

Bestenliste: Beginnend mit diesem Übungsblatt wird für einige der `autotool`-Aufgaben eine Bestenliste geführt. Bewertet wird dabei eine spezifische Größe (z. B. für die Aufgaben Way* dieses Blatts die Anzahl der Kanten der eingesendeten Graphen) und die Zeit der Einsendung. Den aktuellen Stand in der Bestenliste finden Sie unter

`http://liinwww.ira.uka.de/~autotool/scores`.

Aus datenschutzrechtlichen Gründen wird in dieser Liste nur Ihre interne Kennung veröffentlicht. Diese Kennung teilt Ihnen das System `autotool` auf der Verwaltungsseite `http://liinwww.ira.uka.de/~autotool/cgi-bin/Super.cgi` mit. Dort finden Sie auch eine Übersicht über alle Bewertungen, die das System `autotool` für Sie vorgenommen hat.
Die ersten Plätze in der Bestenliste werden am Ende des Semesters angemessen gewürdigt! Kämpfen Sie darum!

Abgabe bis zum **30. April 2008** in der Vorlesung oder im Tutorium.
Falls Sie eine Bearbeitung abgeben möchten, geben Sie bitte den Namen Ihres Tutors und Ihre Übungsgruppe an.