Randomisierte Algorithmen

Simulated Annealing

Thomas Worsch

Fakultät für Informatik
Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2016/2017

Optimierungsproblem

- gegeben: $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$
  - $f^* = \max\{f(x) \mid x \in S\}$
- gesucht: ein x mit $f(x) = f^*$

Markovketten M_λ

- sei $1 \leq \lambda \in \mathbb{R}_+$ («inverse Temperatur»)
- definiere stationäre Verteilungen $\mathbf{w}_\lambda$ durch

$$\mathbf{w}_{\lambda x} = \frac{\lambda^{f(x)}}{Z(\lambda)}$$

  mit $Z(\lambda) = \sum_{x \in S} \lambda^{f(x)}$
- Markovkette M_λ
  - Metropolis-Algorithmus mit
  - stationärer Verteilung $\mathbf{w}_\lambda$
- falls $f(x) > f(y)$, Übergang von Zustand x nach y mit Wahrscheinlichkeit

$$\lambda^{-(f(x)-f(y))}$$

Simulated Annealing

- Random Walk auf *sich ändernder* Markovkette
- beginne mit $\lambda = 1$, d. h.
  - «zielloses Umherirren»
- erhöhe λ langsam d. h.
  - vermeide zunehmend neue Zustände y, für die $f(y)$ kleiner als der aktuelle Wert
- für $\lambda \longrightarrow \infty$ ergibt sich stationäre Verteilung, in nur noch Zustände x mit maximalem $f(x) = f^*$ vorkommen.

Simulated Annealing (2)

Es sei $S^* = \{x \mid f(x) = f^*\}$

$$\mathbf{w}_{\lambda x} = \frac{\lambda^{f(x)}}{Z(\lambda)} = \frac{\lambda^{f(x)}}{\sum_{x \in S} \lambda^{f(x)}} = \frac{\lambda^{f(x)}/\lambda^{f^*}}{\sum_{x \in S} \lambda^{f(x)}/\lambda^{f^*}} = \frac{\lambda^{f(x)}/\lambda^{f^*}}{|S^*| + \sum_{x \in S \setminus S^*} \lambda^{f(x)}/\lambda^{f^*}}$$

Also

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathbf{w}_{\lambda x} = \begin{cases} 1/|S^*| & \text{falls } x \in S^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$