## Aufgaben zu Kapitel 11 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

**Aufgabe 11.1**
Zeigen Sie, dass die Anzahl der perfekten Matchings eines bipartiten Graphen „sehr eng“ mit der Berechnung der Permanente einer Booleschen Matrix zusammenhängt.

Hinweis: Wenn der Graph $n = 2k$ Knoten hat, dann betrachtet man eine Matrix der Größe $k \times k$.

**Lösung 11.1**
Es sei $(V, E)$ ein bipartiter Graph und $T = \{t_1, \dots, t_y\}$ und $U = \{u_1, \dots, u_y\}$ seien zwei disjunkte Knotenteilmengen mit der Eigenschaft, dass jede Kante einen Knoten aus $T$ mit einem Knoten aus $U$ verbindet.

Es sei $B$ die Matrix mit Einträgen

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls eine Kante zwischen } t_i \text{ und } u_j \text{ existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$B$ heißt gelegentlich die Biadjazenzmatrix des bipartiten Graphen.

Wenn der Graph überhaupt ein perfektes Matching besitzt, dann ist jeder Knoten in $T$ oder $U$ und offensichtlich ist $|T| = |U| = n/2 = k$, d. h. $B$ ist eine quadratische Matrix.

Es bezeichne $S_n$ die symmetrische Gruppe mit $n$ Elementen. Die Permanente von $B$ ist

$$\sum_{\sigma \in S_k} \prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)}$$

Wenn für ein $\sigma$ der Summand $\prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)} = 1$ ist, dann bedeutet das, dass es für jedes $i$ eine Kante von $t_i$ nach $u_{\sigma(i)}$ gibt. Da $\sigma$ eine Bijektion ist, bildet die entsprechende Kantenmenge offensichtlich ein perfektes Matching $M_\sigma$. Und verschiedene Permutationen legen verschiedene perfekte Matchings fest.

Umgekehrt legt jedes perfekte Matching auch eine Permutation $\sigma$ fest, für die $\prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)} = 1$. Und verschiedene perfekte Matchings induzieren verschiedene Permutationen.

Also ist die Anzahl perfekter Matchings des Graphen gerade die Permanente von $B$.