Aufgaben zu Kapitel 11 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

Aufgabe 11.1

Für einen Knoten $v \in V$ eines ungerichteten zusammenhängen Graphen $G = (V, E)$ ist die *Überdeckungszeit* (engl. *cover time*) C_v der Erwartungswert für die Anzahl Schritte, die ein Random Walk, der in v startet, benötigt, bis zum ersten Mal jeder Knoten mindestens einmal besucht worden ist.

Zeigen Sie, dass für den vollständigen Graphen K_n mit n Knoten die Überdeckungszeit $C(n) \in O(n \log n)$ ist. (Hier ist der Anfangsknoten offensichtlich irrelevant.) Bearbeiten Sie dazu die folgenden Punkte:

- Angenommen, zu einem Zeitpunkt sind bereits i Knoten besucht worden. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass im nächsten Schritt ein „neuer“ Knoten besucht wird?
- Es sei X_i die Zufallsvariable, die angibt, wieviele Schritte der Random Walk braucht von dem Zeitpunkt, zu dem zum ersten Mal i verschiedene Knoten besucht sind, bis zu dem Zeitpunkt, zu dem zum ersten Mal $i + 1$ verschiedene Knoten besucht sind. Berechnen Sie $\mathbf{E}[X_i]$ (vgl. Aufgabenblatt 4).
- Wie kann man mit Hilfe der X_i die gesuchte Größe C ausdrücken?

Lösung 11.1

Es sei $n = |V|$.

- Da jeder der $n - 1$ Knoten mit gleicher Wahrscheinlichkeit als nächster zu besuchender gewählt wird, und von diesen $i - 1$ schon mal besucht wurden (ein besuchter ist der aktuelle), ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit
$$p_i = \frac{n-1-(i-1)}{n-1} = \frac{n-i}{n-1}$$
- Es ist
$$\mathbf{E}[X_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{n-1}{n-i}$$
- Es ist
$$C = \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-1}{n-i} = (n-1)\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-i} = (n-1)H_{n-1} \in \Theta(n \log n)$$

Aufgabe 11.2

Eine Zahl b sei initial gleich 0 und binär dargestellt. Sie wird durch eine Reihe von insgesamt n INC-Operationen jeweils um 1 erhöht, und zwar auf die naheliegende Art. Es geht nun um die Frage, wieviele *Bit-Operationen* insgesamt nötig sind.

a) Wieviele Bit-Operationen sind im schlimmsten Fall für eine einzelne INC-Operation aus einer Folge von n solchen Operationen notwendig?

b) Benutzen Sie amortisierte Analyse um zu zeigen, dass die *Gesamtzahl* benötigter Bit-Operationen linear in n ist.

Lösung 11.2

a) $\lceil \log_2 n \rceil$

b) Man betrachte die folgende Tabelle:

Zähler				real r_i	Wunsch a_i	nötig $\Delta\Phi$	also Φ
0	0	0	0				0
0	0	0	1	1	2	+1	1
0	0	1	0	2	2	±0	1
0	0	1	1	1	2	+1	2
0	1	0	0	3	2	−1	1
0	1	0	1	1	2	+1	2
0	1	1	0	2	2	±0	2
0	1	1	1	1	2	+1	3
1	0	0	0	4	2	−2	1
1	0	0	1	1	2	+1	2
1	0	1	0	2	2	±0	2
1	0	1	1	1	2	+1	3
1	1	0	0	3	2	−1	2
1	1	0	1	1	2	+1	3
1	1	1	0	2	2	±0	3
1	1	1	1	1	2	+1	4

Die Tabelle suggeriert die Wahl

$$\Phi(i) = \text{Anzahl Einsen in der Dualzahldarstellung von } i$$

Es seien r_i die realen Kosten für die Erhöhung des Zählers von $i-1$ auf i. Das bedeutet, dass $r_i - 1$ Einsen auf Null gekippt werden und eine Null auf Eins. Also ist

$$\Phi(i) = \Phi(i-1) - (r_i - 1) + 1 = \Phi(i-1) - r_i + 2$$

Folglich ist

$$a_i = r_i + \Phi(i) - \Phi(i-1) = r_i + \Phi(i-1) - r_i + 2 - \Phi(i-1) = 2$$

Wegen $\Phi(0) = 0$ ist daher

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \Phi(n) = 2n - \Phi(n) \leq 2n$$

Aufgabe 11.3

1. Wie kann man das „normale“ Seitenwechselproblem als Spezialfall des k-Server-Problems auffassen?

2. Wie kann man das Seitenwechselproblem mit Gewichten als Spezialfall des k-Server-Problems auffassen?

Lösung 11.3
In beiden Fällen benutzt man die Hauptspeicheradressen als Punkte des metrischen Raumes und modelliert die Datenelemente, die im Cache liegen, durch die Serverpositionen.

1. Für $a \neq b$ wähle man $d(a, b) = 1$.

2. Für $a \neq b$ wähle man $d(a, b) = (w(a) + w(b))/2$.