Aufgaben zu Kapitel 10 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

Aufgabe 10.1

Zeigen Sie, dass die Anzahl der perfekten Matchings eines bipartiten Graphen „sehr eng“ mit der Berechnung der Permanente einer Booleschen Matrix zusammenhängt.

Hinweis: Wenn der Graph $n = 2k$ Knoten hat, dann betrachtet man eine Matrix der Größe $k \times k$.

Lösung 10.1

Es sei (V, E) ein bipartiter Graph und $T = \{t_1, \ldots, t_y\}$ und $U = \{u_1, \ldots, u_y\}$ seien zwei disjunkte Knotenteilmengen mit der Eigenschaft, dass jede Kante einen Knoten aus T mit einem Knoten aus U verbindet.

Es sei B die Matrix mit Einträgen

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls eine Kante zwischen } t_i \text{ und } u_j \text{ existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

B heißt gelegentlich die Biadjazenzmatrix des bipartiten Graphen.

Wenn der Graph überhaupt ein perfektes Matching besitzt, dann ist jeder Knoten in T oder U und offensichtlich ist $|T| = |U| = n/2 = k$, d. h. B ist eine quadratische Matrix.

Es bezeichne S_n die symmetrische Gruppe mit n Elementen. Die Permanente von B ist

$$\sum_{\sigma \in S_k} \prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)}$$

Wenn für ein σ der Summand $\prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)} = 1$ ist, dann bedeutet das, dass es für jedes i eine Kante von t_i nach $u_{\sigma(i)}$ gibt. Da σ eine Bijektion ist, bildet die entsprechende Kantenmenge offensichtlich ein perfektes Matching M_σ. Und verschiedene Permutationen legen verschiedene perfekte Matchings fest.

Umgekehrt legt jedes perfekte Matching auch eine Permutation σ fest, für die $\prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)} = 1$. Und verschiedene perfekte Matchings induzieren verschiedene Permutationen.

Also ist die Anzahl perfekter Matchings des Graphen gerade die Permanente von B.