

## Aufgaben zu Kapitel 9 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

### Aufgabe 9.1

Wie in der Vorlesung sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender ungerichteter Graph und  $0 < \beta \leq 1$  eine reelle Zahl. Mit  $d(i)$  bezeichnen wir den Grad von Knoten  $i$  und es sei  $d = \max_{i \in V} d(i)$ . Die Übergangswahrscheinlichkeiten  $P_{ij}$  der Markov-Kette  $M_{G,\beta}$  seien wie folgt definiert:

$$P_{ij} = \begin{cases} \beta/d & \text{falls } i \neq j \text{ und } (i, j) \in E \\ 1 - d(i)\beta/d & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man beweise:

1. Die Gleichverteilung ist die stationäre Verteilung von  $M_{G,\beta}$ .
2. Für  $\beta < 1$  ist  $M_{G,\beta}$  aperiodisch.
3. Für  $\beta < 1$  ist  $M_{G,\beta}$  reversibel.

### Lösung 9.1

1. Da die Kette irreduzibel ist, hat sie genau eine stationäre Verteilung. Es genügt die Rechnung, dass die Gleichverteilung  $\mathbf{p}_i = 1/|V|$  eine stationäre Verteilung ist:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}^P)_j &= \sum_i \mathbf{p}_i P_{ij} \\ &= \mathbf{p}_j P_{jj} + \sum_{j \neq i, (i,j) \in E} \mathbf{p}_i P_{ij} \\ &= 1/|V| \cdot (1 - d(j)\beta/d) + 1/|V| \sum_{j \neq i, (j,i) \in E} \beta/d \\ &= 1/|V| \cdot (1 - d(j)\beta/d) + 1/|V| \cdot d(j) \cdot \beta/d \\ &= 1/|V| = \mathbf{p}_j \end{aligned}$$

2. Für  $\beta < 1$  ist offensichtlich für *jeden* Knoten  $P_{ii} = 1 - d(i)\beta/d > 0$ .
3. Nachrechnen. Für alle  $i \neq j$  mit  $(i, j) \in E$  ist  $\mathbf{p}_i P_{ij} = \beta/|V|d$  gleich.  
Die Fälle  $(i, j) \notin E$  und  $i = j$  sind trivial.

### Aufgabe 9.2

Zeigen Sie, dass die Markov-Kette des Metropolis-Algorithmus (Punkt 9.8 der Vorlesung) reversibel ist.

### Lösung 9.2

Man rechnet

$$\begin{aligned} \frac{e^{-H(i)}/Z \cdot P_{ij}}{e^{-H(j)}/Z \cdot P_{ji}} &= e^{H(j)-H(i)} \frac{P_{ij}}{P_{ji}} \\ &= e^{H(j)-H(i)} \cdot \begin{cases} Q_{ij} / (Q_{ji} e^{H(j)-H(i)}) & \text{falls } H(j) \leq H(i) \\ Q_{ij} e^{H(i)-H(j)} / Q_{ji} & \text{falls } H(j) > H(i) \end{cases} \end{aligned}$$

was sich wegen der Symmetrie von  $Q$  sofort vereinfacht zu

$$= 1$$