Aufgaben zu Kapitel 9 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

Aufgabe 9.1
Wie in der Vorlesung sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph und $0 < \beta \leq 1$ eine reelle Zahl. Mit $d(i)$ bezeichnen wir den Grad von Knoten i und es sei $d = \max_{i \in V} d(i)$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten P_{ij} der Markov-Kette $M_{G,\beta}$ seien wie folgt definiert:

$$P_{ij} = \begin{cases} \beta/d & \text{falls } i \neq j \text{ und } (i,j) \in E \\ 1 - d(i)\beta/d & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man beweise:

1. Die Gleichverteilung ist die stationäre Verteilung von $M_{G,\beta}$.
2. Für $\beta < 1$ ist $M_{G,\beta}$ aperiodisch.
3. Für $\beta < 1$ ist $M_{G,\beta}$ reversibel.

Lösung 9.1

1. Da die Kette irreduzibel ist, hat sie genau eine stationäre Verteilung. Es genügt die Rechung, dass die Gleichverteilung $\mathbf{p}_i = 1/|V|$ eine stationäre Verteilung ist:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}P)_j &= \sum_i \mathbf{p}_i P_{ij} \\ &= \mathbf{p}_i P_{ii} + \sum_{j \neq i, (i,j) \in E} \mathbf{p}_i P_{ij} \\ &= 1/|V| \cdot (1 - d(i)\beta/d) + d(i) \cdot 1/|V| \cdot \beta/d \\ &= 1/|V| = \mathbf{p}_j \end{aligned}$$

2. Für $\beta < 1$ ist offensichtlich für *jeden* Knoten $P_{ii} = 1 - d(i)\beta/d > 0$.

3. Nachrechnen. Für alle $i \neq j$ mit $(i,j) \in E$ ist $\mathbf{p}_i P_{ij} = \beta/|V|d$ gleich. Die Fälle $(i,j) \notin E$ und $i = j$ sind trivial.

Aufgabe 9.2
Zeigen Sie, dass die Markov-Kette des Metropolis-Algorithmus (Punkt 9.8 der Vorlesung) reversibel ist.

Lösung 9.2
Man rechnet

$$\begin{aligned}\frac{e^{-H(i)}/Z \cdot P_{ij}}{e^{-H(j)}/Z \cdot P_{ji}} &= e^{H(j)-H(i)}\frac{P_{ij}}{P_{ji}} \\ &= e^{H(j)-H(i)} \cdot \begin{cases} Q_{ij}/\left(Q_{ji}e^{H(j)-H(i)}\right) & \text{falls } H(j) \leq H(i) \\ Q_{ij}e^{H(i)-H(j)}/Q_{ji} & \text{falls } H(j) > H(i_t) \end{cases}\end{aligned}$$

was sich wegen der Symmetrie von Q sofort vereinfacht zu

$$= 1$$

Aufgabe 9.3
Für zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ über einer Menge S haben wir die totale Variationsdistanz so definiert:

$$\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|_{tv} = \frac{1}{2}\sum_{j \in S} |\mathbf{p}_j - \mathbf{q}_j| \ .$$

Man zeige:

$$\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|_{tv} = \max_{T \subseteq S} |\mathbf{p}(T) - \mathbf{q}(T)|$$

wobei $\mathbf{p}(T)$ definiert ist als $\mathbf{p}(T) = \sum_{j \in T} \mathbf{p}_j$.

Lösung 9.3

Es sei $X = \{j \mid \mathbf{p}_j \leq \mathbf{q}_j\}$ und $Y = \{j \mid \mathbf{p}_j > \mathbf{q}_j\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{j\in Y} \mathbf{p}_j - \mathbf{q}_j &= 1 - \sum_{j\in Y} \mathbf{q}_j - \sum_{j\in X} \mathbf{p}_j \\ &= \sum_{j\in X} \mathbf{q}_j - \sum_{j\in X} \mathbf{p}_j \\ &= \sum_{j\in X} \mathbf{q}_j - \mathbf{p}_j\end{aligned}$$

Und es ist

$$\begin{aligned}\|p - q\|_{tv} &= \frac{1}{2} \sum_{j\in S} |\mathbf{p}_j - \mathbf{q}_j| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j\in X} \mathbf{q}_j - \mathbf{p}_j + \frac{1}{2} \sum_{j\in Y} \mathbf{p}_j - \mathbf{q}_j\end{aligned}$$

also nach dem vorangegangenen

$$\|p - q\|_{tv} = \sum_{j\in X} \mathbf{q}_j - \mathbf{p}_j = \sum_{j\in Y} \mathbf{p}_j - \mathbf{q}_j$$

Nun wird $|\mathbf{p}(T) - \mathbf{q}(T)| = |\sum_{j\in T} \mathbf{p}_j - \mathbf{q}_j|$ natürlich genau dann groß, wenn T eine Teilmenge ist, auf der für alle $j \in T$ immer $\mathbf{p}_j > \mathbf{q}_j$ (oder umgekehrt) ist. Also wird der Ausdruck für $T = X$ und $T = Y$ maximal.

Aufgabe 9.4
Die Variationsdistanz einer Markov-Kette war definiert als

$$\Delta(t) = \max_{\mathbf{p}} \|\mathbf{p}P^t - \mathbf{w}\|_{tv}$$

Zeigen Sie, dass das Maximum für einen Einheitsvektor $\mathbf{p} = \mathbf{e}_i$ angemommen wird:

$$\Delta(t) = \max_i \|\mathbf{e}_i P^t - \mathbf{w}\|_{tv} = \max_i \|P_i^t - \mathbf{w}\|_{tv}$$

Lösung 9.4
Es seien $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ zwei Zeilen von P^t, wobei außerdem $\mathbf{p}$ eine Zeile von P^t sei, für die $\|\mathbf{p} - \mathbf{w}\|_{tv}$ maximiert wird.

Wir zeigen für $0 \leq \alpha \leq 1$ und $\beta = 1 - \alpha$:

$$\|\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} - \mathbf{w}\|_{tv} \leq \|\mathbf{p} - \mathbf{w}\|_{tv}$$

Das geht so:

$$\begin{aligned}
\|(\alpha\mathbf{p}+\beta\mathbf{q})-\mathbf{w}\|_{tv} &= \|(\alpha\mathbf{p}+\beta\mathbf{q})-(\alpha\mathbf{w}+\beta\mathbf{w})\|_{tv} \\
&= \|(\alpha\mathbf{p}-\alpha\mathbf{w})-(\beta\mathbf{w}-\beta\mathbf{q})\|_{tv} \\
&= \|\alpha(\mathbf{p}-\mathbf{w})-\beta(\mathbf{w}-\mathbf{q})\|_{tv} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i\in S}|\alpha(\mathbf{p}_i-\mathbf{w}_i)-\beta(\mathbf{w}_i-\mathbf{q}_i)| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i\in S}|\alpha(\mathbf{p}_i-\mathbf{w}_i)+\beta(\mathbf{q}_i-\mathbf{w}_i)| \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{i\in S}|\alpha(\mathbf{p}_i-\mathbf{w}_i)|+|\beta(\mathbf{q}_i-\mathbf{w}_i)| \\
&= \alpha\|\mathbf{p}-\mathbf{w}\|_{tv}+\beta\|\mathbf{q}-\mathbf{w}\|_{tv} \\
&\leq \alpha\|\mathbf{p}-\mathbf{w}\|_{tv}+\beta\|\mathbf{p}-\mathbf{w}\|_{tv} \\
&= (\alpha+\beta)\|\mathbf{p}-\mathbf{w}\|_{tv} \\
&= \|\mathbf{p}-\mathbf{w}\|_{tv}
\end{aligned}$$