Aufgaben zu Kapitel 7 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

Aufgabe 7.1
Geben Sie 2SAT-Formeln mit n Variablen an, die nur genau eine erfüllende Belegung besitzen.

Lösung 7.1
Zum Beispiel leisten Formeln der folgenden Struktur das Gewünschte:

$$(x_1 \vee x_1) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3) \wedge \cdots \wedge (\bar{x}_{n-1} \vee x_n)$$

Aufgabe 7.2

1. Es sei H_3 der 3-dimensionale Würfel. Jede Kante sei durch einen elektrischen Widerstand von $1\,\Omega$ realisiert. Was ist der effektive Widerstand zwischen diagonal gegenüberliegender Ecken, also z. B. zwischen 000 und 111?

2. Versuchen Sie, die analoge Aufgabe für den allgemeinen Fall des d-dimensionalen Hyperwürfels zu lösen.

Lösung 7.2

1. Am Stromfluss zwischen 000 und 111 ändert sich aus Symmetreigründen nichts, wenn man jeweils alle Knoten mit gleichem Hamminggewicht „zusammenlötet“ (Widerstand 0). Als Ergebnis hat man eine einfache Reihenschaltung dreier Parallelschaltungen mit resp. 1/3, 1/6 und 1/3 Ohm. Der effektive Gesamtwiderstand ist also 5/6 Ohm.

2. Versuch der analogen Vorgehensweise:

   - zwischen Knoten mit Hamminggewicht g bzw. $g+1$ gibt es K_g Kanten, mit

     $$K_g = d\binom{d}{g+1}$$

- Also hat die betreffende Parallelschaltung Gesamtwiderstand $R_g = 1/K_g$
- Die Reihenschaltung dieser Parallelschaltungen hat Gesamtwiderstand

$$\begin{aligned}\sum_{g=0}^{d-1} R_g &= \sum_{g=0}^{d-1} 1/K_g \\ &= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{d} + \frac{2}{d(d-1)} + \cdots + \frac{d}{d!}\right)\end{aligned}$$

Für große d strebt dieser Wert also gegen $1/d^2$.

Aufgabe 7.3
Versuchen Sie, eine Familie von Graphen $(G_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $G_n = (V_n, E_n)$ und jeweils zwei Knoten $u_n, v_n \in V_n$ finden, so dass für $m_n = m_{u_n,v_n}$ gilt: $m_n \in o(n^3)$ und $m_n \notin O(n^2)$.

Lösung 7.3
Man nehme einen Pfad P der Länge $n/3$ mit Endknoten u_n und v_n und hänge zunächst an jedes Ende einen Zyklus U resp. V mit jeweils $n/3$ Knoten. Für gewünschtes $m_n = m_{u_n v_n} \in \omega(n^2) \cap o(n^3)$ verbinde man im Zyklus U jeden Knoten mit $d = m_{u_n v_n}/n$ weiteren Nachfolgern.

Dann fließen von jedem der $n/3$ Knoten in U gerade $m_{u_n v_n}/n$ Ampere über jede der $n/3$ Kanten in P von u_n nach v_n ...

Das Analoge kann man (gleichzeitig) im Zyklus V für jedes gewünschte $m_{v_n u_n}$ machen.