Aufgaben zu Kapitel 6 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

Aufgabe 6.1
Es sei die Abkürzung

$$A(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

definiert. Zeigen Sie: Für $x \geq 1$ ist $A(x)$ ist monoton wachsend und

$$\lim_{x\to\infty} A(x) = \frac{1}{e}$$

Lösung 6.1
Es sei $x \geq 1$. Wir schreiben zunächst $A(x) = e^{x \ln(1-1/x)} = e^{B(x)}$ und sehen uns $B(x) = \ln A(x)$ an.

$$\begin{aligned}
B(x) &= x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = x \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) \\
B'(x) &= \ln(1 - \frac{1}{x}) + x \frac{x}{x-1} \frac{1}{x^2} \\
&= \ln(1 - \frac{1}{x}) + \frac{1}{x-1} \\
B''(x) &= \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} \\
&= \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

Für $x > 1$ ist $B''(x) < 0$ also ist $B'(x)$ monoton fallend. Für $x \to \infty$ geht $B'(x) \to 0$, also ist $B'(x)$ positiv. Also wächst $B(x)$ monoton für $x \geq 1$. Da e^x eine monoton wachsende Funktion ist, ist mit $B(x)$ folglich auch $A(x)$ monoton wachsend.

Außerdem ergibt sich mit Hilfe der l'Hospitalschen Regeln

$$\lim_{x\to\infty} B(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x-1} \cdot \frac{x \cdot 1 - 1 \cdot (x-1)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{x}{x-1} = -1$$

Also ist $\lim_{x\to\infty} A(x) = e^{-1}$.

Aufgabe 6.2
Finden Sie eine unendliche Familie von Graphen G_n gfinden derart, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der mininale Schnitt in G_n durch die zufällige iterierte Kontraktion bis auf zwei Knoten nicht zerstört wird, in $O(1/n^2)$ ist.

Lösung 6.2
fehlt noch

Aufgabe 6.3
Für einen Graphen G sei wie in der Vorlesung $L(G)$ die Menge der lokal minimalen Kanten und $B(G)$ der Graph, der nach einer Borůvka-Phase aus G entsteht. Zeigen Sie im Detail, dass die Kanten aus $L(G)$ und die Kanten eines MST von $B(G)$ zusammen einen MST von G bilden.

Lösung 6.3
(Dies ist der Text aus dem Skript mit Erweiterungen. Man könnte hier und da noch pingeliger argumentieren, aber das muss hoffentlich nicht sein.)

(i) Jeder aufspannende Baum T von G (gleichgültig, ob minimal oder nicht), der alle Kanten aus $L(G)$ enthält, induziert einen aufspannenden Baum T' von $B(G)$ mit $w(T') = w(T) - w(L(G))$, indem man aus T die Kanten entfernt, die in $L(G)$ liegen.

   Man muss sich überlegen, dass T' zusammenhängend und zyklenfrei ist. Es sollte klar sein, dass andernfalls schon T die erste bzw. zweite Eigenschaft auch nicht gehabt hat.

(ii) Umgekehrt gilt auch, dass jeder aufspannde Baum T' von $B(G)$ einen aufspannenden Baum $\bar{T}'$ von G induziert mit $w(T) = w(T') + w(L(G))$, indem man zu T' die Kanten aus $L(G)$ hinzu nimmt.

   Man muss sich überlegen, dass ein so konstruiertes T zusammenhängend und zyklenfrei ist. $L(G)$ ist ein Wald in G (siehe Vorlesung), und zwar ein aufspannender, denn jeder Knoten besitzt eine lokal minimale Kante. Damit ergibt sich der Zusammenhang von T. Hätte

T einen Zyklus, so könnte man daraus durch Kontraktion der Kanten in $L(G)$ einen Zyklus in T' konstruieren.

(iii) Sei nun T ein *minimaler* aufspannender Baum von G und $B(T)$ der korrespondierende aufspannende Baum von $B(G)$. Wäre $B(T)$ nicht minimal für $B(G)$, sondern etwa T', so hätte der dadurch induzierte aufspannende Baum $\bar{T}'$ von G nur Gewicht $w(\bar{T}') = w(T') + w(L(G)) < w(B(T)) + w(L(G)) = w(T)$ im Widerspruch zur Minimalität von T.

Aufgabe 6.4

Geben Sie „die“ Definition von *„minimaler aufspannender Wald“* an.