

## Aufgaben zu Kapitel 3 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

### Aufgabe 3.1

Gegeben sei eine probabilistische TM  $M$  (nicht notwendigerweise in Normalform), die für jede Eingabe hält.

Konstruieren Sie eine probabilistische TM  $M'$ , die für keine Eingabe mehr Schritte macht als  $M$  schlimmstenfalls es tut und in jeder Situation genau zwei verschiedene Möglichkeiten der Weiterarbeit hat oder keine.

### Lösung 3.1

Für jedes Paar  $(s_1, b)$  mit  $\delta(s_1, b) = \{(s_2, b_2, d_2)\}$ , ergänzt man einen „neuen“ Zustand  $s'_2$ , definiert

$$\delta(s_1, b) = \{(s_2, b_2, d_2), (s'_2, b_2, d_2)\}$$

und sorgt anschließend (!) dafür, dass sich  $s'_2$  wie  $s_2$  verhält.

### Aufgabe 3.2

Unter welchen Umständen und wie könnte man die PTM  $M'$  aus der vorangegangenen Aufgabe so ergänzen, dass eine PTM  $M''$  in Normalform entsteht?

### Lösung 3.2

Das verbleibende Problem: alle Berechnungspfade müssen gleich lang sein: Man zähle die Schritte (wenn man herausbekommen kann, wieviele es sein müssen ...).

### Aufgabe 3.3

Beweisen Sie:

$$\sum_{i=0}^k i \cdot 2^{-i} = 2 - (k+2)2^{-k}$$

### Lösung 3.3

Vollständige Induktion liefert sofort das Gewünschte.

### \* Aufgabe 3.4

Versuchen Sie zu zeigen, dass das folgende Problem unentscheidbar ist:

**Probleminstanz:** eine probabilistische Turingmaschine  $M$

**Frage:** Wird jedes Eingabewort von  $M$  entweder gar nicht oder mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens  $1/2$  akzeptiert?

