

Aufgaben zu Kapitel 1 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

Aufgabe 1.1

Gegeben sei ein randomisierter Algorithmus `BADBIT`, der keine Eingabe liest und als Ausgabe zufällig mit Wahrscheinlichkeit p die Zahl 0 und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ die Zahl 1 liefert. Es sei $0 < p < 1$; der konkrete Wert von p sei aber unbekannt.

Entwerfen Sie einen randomisierten Algorithmus `FAIRBIT`, der keine Eingabe liest und als Ausgabe immer zufällig eine der Zahlen 0 und 1 mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ liefert.

Was können Sie über die Laufzeit Ihres Algorithmus sagen?

Lösung 1.1

Algorithmusidee:

```
FAIRBIT()
1  repeat  $x \leftarrow \text{BADBIT}()$ 
2      $y \leftarrow \text{BADBIT}()$ 
3  until  $(x \neq y)$ 
4  return  $x$ 
```

Im folgenden benutzen wir folgende Überlegung (für $z \in \mathbb{R}$ mit $0 < |z| < 1$):

$$\begin{aligned} \text{sei} \quad R &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot z^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot z^i \\ \text{dann} \quad Rz &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot z^i \\ \text{also} \quad R(1-z) &= \sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z} \\ \text{also} \quad R &= \frac{1}{(1-z)^2} \end{aligned}$$

Nun ist im Algorithmus die Wahrscheinlichkeit für $x = y$ gleich $z = p^2 + q^2$, also $1 - z = 2pq$. Wegen $0 < p < 1$ ist $0 < |z| < 1$. Daher ergibt sich für den Erwartungswert der Laufzeit:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot 2 \cdot (p^2 + q^2)^{i-1} 2pq = 4pq \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot z^{i-1} = 4pq \frac{1}{4p^2q^2} = \frac{1}{pq}$$

Aufgabe 1.2

Gegeben sei ein randomisierter Algorithmus `FAIRBIT` wie in Aufgabe 1.

Entwerfen Sie einen randomisierten Algorithmus, der keine Eingabe liest und als Ausgabe zufällig gleichverteilt eine von drei Zahlen 0, 1 oder 2 liefert.

Was können Sie über die Laufzeit Ihres Algorithmus sagen?

Lösung 1.2

Algorithmusidee:

```
RANDOMTRIT()
1  repeat  x ← FAIRBIT()
2           y ← FAIRBIT()
3  until  (x = 0 ∨ y = 0)
4  return 2x + y
```

Abschätzung der Laufzeit:

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i \left(\frac{1}{4}\right)^{i-1} \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \frac{1}{(3/4)^2} = \frac{8}{3}$$

Aufgabe 1.3

Es sei n eine ungerade natürliche Zahl. Es werde n mal Algorithmus `FAIRBIT` aufgerufen.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass insgesamt öfter eine 1 als eine 0 ausgegeben wird?
- Können Sie das auch *ausrechnen*?

Lösung 1.3

- Die Wahrscheinlichkeit, dass insgesamt öfter eine 1 als eine 0 ausgegeben wird, ist genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass insgesamt öfter eine 0 als eine 1 ausgegeben wird. Also sind beide Wahrscheinlichkeiten genau $1/2$.
- Es sei $h = \lfloor n/2 \rfloor$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\sum_{i=0}^h \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^n = \frac{1}{2}$$

wobei bei der Rechnung ausgenutzt wurde, dass

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n \quad \text{und} \quad \binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$$