Aufgaben zu Kapitel 12 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

Aufgabe 12.1

Für einen Knoten $v \in V$ eines ungerichteten zusammenhängen Graphen $G = (V, E)$ ist die *Überdeckungszeit* (engl. *cover time*) C_v der Erwartungswert für die Anzahl Schritte, die ein Random Walk, der in v startet, benötigt, bis zum ersten Mal jeder Knoten mindestens einmal besucht worden ist.

Zeigen Sie, dass für den vollständigen Graphen K_n mit n Knoten die Überdeckungszeit $C(n) \in O(n \log n)$ ist. (Hier ist der Anfangsknoten offensichtlich irrelevant.) Bearbeiten Sie dazu die folgenden Punkte:

- Angenommen, zu einem Zeitpunkt sind bereits i Knoten besucht worden. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass im nächsten Schritt ein „neuer“ Knoten besucht wird?
- Es sei X_i die Zufallsvariable, die angibt, wieviele Schritte der Random Walk braucht von dem Zeitpunkt, zu dem zum ersten Mal i verschiedene Knoten besucht sind, bis zu dem Zeitpunkt, zu dem zum ersten Mal $i + 1$ verschiedene Knoten besucht sind. Berechnen Sie $\mathbf{E}[X_i]$ (vgl. Aufgabenblatt 4).
- Wie kann man mit Hilfe der X_i die gesuchte Größe C ausdrücken?

Aufgabe 12.2

Eine Zahl b sei initial gleich 0 und binär dargestellt. Sie wird durch eine Reihe von insgesamt n Inc-Operationen jeweils um 1 erhöht, und zwar auf die naheliegende Art. Es geht nun um die Frage, wieviele *Bit-Operationen* insgesamt nötig sind.

a) Wieviele Bit-Operationen sind im schlimmsten Fall für eine einzelne Inc-Operation aus einer Folge von n solchen Operationen notwendig?

b) Benutzen Sie amortisierte Analyse um zu zeigen, dass die *Gesamtzahl* benötigter Bit-Operationen linear in n ist.

Aufgabe 12.3

1. Wie kann man das „normale“ Seitenwechselproblem als Spezialfall des k-Server-Problems auffassen?
2. Wie kann man das Seitenwechselproblem mit Gewichten als Spezialfall des k-Server-Problems auffassen?