

## Aufgaben zu Kapitel 10 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

### Aufgabe 10.1

Für zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  über einer Menge  $S$  haben wir die totale Variationsdistanz so definiert:

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|_{tv} = \frac{1}{2} \sum_{j \in S} |\mathbf{p}_j - \mathbf{q}_j|.$$

Man zeige:

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|_{tv} = \max_{T \subseteq S} |\mathbf{p}(T) - \mathbf{q}(T)|$$

wobei  $\mathbf{p}(T)$  definiert ist als  $\mathbf{p}(T) = \sum_{j \in T} \mathbf{p}_j$ .

### Aufgabe 10.2

Die Variationsdistanz einer Markov-Kette war definiert als

$$\Delta(t) = \max_{\mathbf{p}} \|\mathbf{p}P^t - \mathbf{w}\|_{tv}$$

Zeigen Sie, dass das Maximum für einen Einheitsvektor  $\mathbf{p} = \mathbf{e}_i$  angenommen wird:

$$\Delta(t) = \max_i \|\mathbf{e}_i P^t - \mathbf{w}\|_{tv} = \max_i \|P_i^t - \mathbf{w}\|_{tv}$$