

## Aufgaben zu Kapitel 9 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

### Aufgabe 9.1

Wie in der Vorlesung sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender ungerichteter Graph und  $0 < \beta \leq 1$  eine reelle Zahl. Mit  $d(i)$  bezeichnen wir den Grad von Knoten  $i$  und es sei  $d = \max_{i \in V} d(i)$ . Die Übergangswahrscheinlichkeiten  $P_{ij}$  der Markov-Kette  $M_{G,\beta}$  seien wie folgt definiert:

$$P_{ij} = \begin{cases} \beta/d & \text{falls } i \neq j \text{ und } (i, j) \in E \\ 1 - d(i)\beta/d & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man beweise:

1. Die Gleichverteilung ist die stationäre Verteilung von  $M_{G,\beta}$ .
2. Für  $\beta < 1$  ist  $M_{G,\beta}$  aperiodisch.
3. Für  $\beta < 1$  ist  $M_{G,\beta}$  reversibel.

### Aufgabe 9.2

Zeigen Sie, dass die Markov-Kette des Metropolis-Algorithmus (Punkt 9.8 der Vorlesung) reversibel ist.