Aufgaben zu Kapitel 4 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

Aufgabe 4.1
Zeigen Sie: Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen (die numerische Werte haben), dann sind auch e^X und e^Y unabhängige Zufallsvariablen.

Aufgabe 4.2
Eine Zufallsvariable X_i heißt *geometrisch verteilt mit Parameter* p, wenn sie Werte $t \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ annimmt und gilt:

$$\mathbf{Pr}\left[X_i = t\right] = p(1-p)^{t-1} .$$

1. Berechnen Sie den Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen.

2. Es seien nun $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch und geometrisch (mit gleichem Parameter p) verteilte Zufallsvariablen und $X = X_1 + \cdots + X_n$. Berechnen Sie den Erwartungswert μ von X.

Aufgabe 4.3
Eine Münze, die bei jedem Wurf mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ Zahl zeigt, wird n Mal (unabhängig) geworfen. Die binäre ZV X_i sei 1, falls beim i-ten Wurf Zahl kommt und 0 sonst. Es sei $X = \sum X_i$.

- Welche Schranke liefert die Chebyshev-Ungleichung für die Wahrscheinlichkeit
$$\mathbf{Pr}\left[\left|X - \frac{n}{2}\right| \geq \frac{n}{4}\right] ?$$

- Welches Ergebnis liefert die Anwendung der Chernoff-Schranken für
$$\mathbf{Pr}\left[\left|X - \frac{n}{2}\right| \geq \frac{n}{4}\right] ?$$

- Welches Ergebnis liefert die Anwendung der Chernoff-Schranken für
$$\mathbf{Pr}\left[\left|X - \frac{n}{2}\right| \geq \frac{1}{2}\sqrt{6n \ln n}\right] ?$$

Aufgabe 4.4
Betrachten Sie die folgende Variante RANDBITFIXING des Bit-Fixing-Algorithmus:

- Solange aktuelle Adresse x und Zieladresse y verschieden sind, wird aus den Bitpositionen, an denen sich x und y unterscheiden, zufällig gleichverteilt ein i gewählt und der Pfad von x nach $x \oplus e_i$ fortgesetzt.

Es soll bewiesen werden, dass wie beim deterministischen Bit-Fixing auch bei dieser Vorgehensweise beim Routen der Permutation „Matrix-Transposition" mit großer Wahrscheinlichkeit noch „große" Staus entstehen.

Hier ein paar Hinweise zu einer möglichen Vorgehensweise:

- Es sei $c = d/2$.
- Betrachten Sie die Pakete, die in den $\sqrt{N}$ Knoten mit den Adressen

$$x = (\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_c}_{c \text{ Bits}}, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{c \text{ Bits}})$$

  starten.
- Betrachten Sie eine beliebige aber feste Zahl k mit $1 \leq k \leq c$ (die Sie später geeignet wählen) und die Menge

$$S_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_c, 0, 0, \cdots, 0) \mid \text{genau } k \text{ der ersten } c \text{ Bits sind } 1\}$$

Aufgaben:

1. Beweisen Sie für alle $1 \leq k \leq n$:
   (a) $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k}$ (b) $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$.
   Hinweis zu (b): Stirlings Formel.
2. Wie groß ist S_k? Geben Sie eine Abschätzung ohne Binomialkoeffizienten an.
3. Es sei $x \in S_k$ und Y_x die Zufallsvariable mit

$$Y_x = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ durch Knoten } (0, 0, \ldots, 0) \text{ transportiert wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Geben Sie eine Abschätzung für $\mathbf{E}[Y_x]$ an, in der keine Binomialkoeffizienten vorkommen.

4. Es sei $Z_k = \sum_{x \in S_k} Y_x$. Schätzen Sie $\mathbf{E}\left[Z_k\right]$ nach unten ab.
5. Geben Sie eine legale Wahl für k an, so dass $\mathbf{E}\left[Z_k\right]$ exponenziell in n ist. Was bedeutet das?