Aufgaben zu Kapitel 2 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

Aufgabe 2.1
Es sei $\mathbb{F}$ ein Körper und $P_1(x)$, $P_2(x)$ und $P_3(x)$ seien drei Polynome aus $\mathbb{F}[x]$ mit $\deg P_1 \leq n$, $\deg P_2 \leq n$ und $\deg P_3 \leq 2n$. Die Aufgabe besteht darin, herauszufinden, ob $P_1(x)P_2(x) = P_3(x)$ ist oder nicht. Betrachten Sie den folgenden

Algorithmus

```
⟨Es sei S ⊆ 𝔽 eine Teilmenge mindestens der Größe 2n + 1⟩
for i ← 1 to k do
    r ← ⟨zufällig gleichverteilt gewähltes Element aus S⟩
    if P1(r)P2(r) ≠ P3(r) then
        return NO
    fi
od
return YES
```

- Beweisen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Algorithmus fälschlicherweise YES ausgibt, ist kleiner gleich $(2n/\,|S|)^k$.
- Welche Zeit benötigt man mit dem naheliegenden deterministischen Algorithmus für die Lösung des Problems? Und welche Laufzeit hat man bei obigem randomisierten Algorithmus zu erwarten?

Aufgabe 2.2
Gegeben sei ein deterministischer Algorithmus isPrime, der eine natürliche Zahl n als Eingabe, überprüft ob sie eine Primzahl ist oder nicht.

Finden Sie einen randomisierten Algorithmus, der zu einer natürlichen Zahl $m \geq 2$ als Eingabe als Ausgabe zufällig gleichverteilt jede Primzahl p mit $2 \leq p \leq m$ aus Ausgabe produziert.

Was können Sie über die Laufzeit Ihres Algorithmus sagen?

Aufgabe 2.3
Beweisen Sie, dass für die n-te Harmonische Zahl gilt: $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \in \Theta(\ln n)$.