

## Aufgaben zu Kapitel 2 der Vorlesung „Randomisierte Algorithmen“

### Aufgabe 2.1

Es sei  $\mathbb{F}$  ein Körper und  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$  und  $P_3(x)$  seien drei Polynome aus  $\mathbb{F}[x]$  mit  $\deg P_1 \leq n$ ,  $\deg P_2 \leq n$  und  $\deg P_3 \leq 2n$ . Die Aufgabe besteht darin, herauszufinden, ob  $P_1(x)P_2(x) = P_3(x)$  ist oder nicht. Betrachten Sie den folgenden

#### Algorithmus

```
⟨Es sei  $S \subseteq \mathbb{F}$  eine Teilmenge mindestens der Größe  $2n + 1$ ⟩  
for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do  
     $r \leftarrow$  ⟨zufällig gleichverteilt gewähltes Element aus  $S$ ⟩  
    if  $P_1(r)P_2(r) \neq P_3(r)$  then  
        return NO  
    fi  
od  
return YES
```

- Beweisen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Algorithmus fälschlicherweise YES ausgibt, ist kleiner gleich  $(2n/|S|)^k$ .
- Welche Zeit benötigt man mit dem naheliegenden deterministischen Algorithmus für die Lösung des Problems? Und welche Laufzeit hat man bei obigem randomisierten Algorithmus zu erwarten?

### Aufgabe 2.2

Gegeben sei ein deterministischer Algorithmus `ISPRIME`, der eine natürliche Zahl  $n$  als Eingabe, überprüft ob sie eine Primzahl ist oder nicht.

Finden Sie einen randomisierten Algorithmus, der zu einer natürlichen Zahl  $m \geq 2$  als Eingabe als Ausgabe zufällig gleichverteilt jede Primzahl  $p$  mit  $2 \leq p \leq m$  aus Ausgabe produziert.

Was können Sie über die Laufzeit Ihres Algorithmus sagen?

### Aufgabe 2.3

Beweisen Sie, dass für die  $n$ -te Harmonische Zahl gilt:  $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \in \Theta(\ln n)$ .