Modelle der Parallelverarbeitung

9. Maschinenklassen und Berechnungshypothesen

Thomas Worsch

Institut für Theoretische Informatik
Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2018

Überblick

Maschinenklassen

Berechnungshypothesen

Überblick

Maschinenklassen

Berechnungshypothesen

Literatur

P. van Emde Boas
The second machine class: models of parallelism
CWI Syllabus, Band 9, S. 133–161, Universität Amsterdam, 1984.

P. van Emde Boas
Machine Models and Simulations
Handbook of Theoretical Computer Science, Band A, S. 1–66, Elsevier, 1990.

Definition

- Es seien
  - C_1, D_1, E_1 Komplexitätsmaße für Maschinenmodell M_1,
  - C_2, D_2, E_2 Komplexitätsmaße für Maschinenmodell M_2,
  - f, g und h drei Funktionen.
- C_1, D_1 und E_1 sind für (f, g, h) *gleichzeitig polynomiell verknüpft* mit C_2, D_2 und E_2, falls gilt:

$$M_1\text{-}C_1\text{-}D_1\text{-}E_1(\mathrm{Pol}(f), \mathrm{Pol}(g), \mathrm{Pol}(h)) \\ = M_2\text{-}C_2\text{-}D_2\text{-}E_2(\mathrm{Pol}(f), \mathrm{Pol}(g), \mathrm{Pol}(h))$$

- Schreibweise

$$M_1\text{-}C_1\text{-}D_1\text{-}E_1(f, g, h) \overset{\mathrm{pol}}{\approx} M_2\text{-}C_2\text{-}D_2\text{-}E_2(f, g, h)$$

- analoge Definitionen für je ein oder zwei Komplexitätsmaße.

Beachte

- Aus
$$M_1\text{-}C_1\text{-}D_1 \overset{\text{pol}}{\approx} M_2\text{-}C_2\text{-}D_2$$
folgen
$$M_1\text{-}C_1 \overset{\text{pol}}{\approx} M_2\text{-}C_2 \qquad \text{und} \qquad M_1\text{-}D_1 \overset{\text{pol}}{\approx} M_2\text{-}D_2$$
- Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.
  - *gleichzeitige* Verknüpftheit !
  - Falls $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, gibt es konkrete Gegenbeispiele.

Vereinbarung

(eine Definition kann man das nicht nennen)

- Die *erste Maschinenklasse* $\mathbf{M}_1$ beinhaltet alle Maschinenmodelle S, für die gilt:

$$S\text{-}\textsc{Spc}(\Theta(s))\text{-}\textsc{Time}(\mathrm{Pol}(t)) = \mathbb{E}\text{-}\mathbb{W}^*\text{-TM-}\textsc{Spc}(\Theta(s))\text{-}\textsc{Time}(\mathrm{Pol}(t))$$

- Die *zweite Maschinenklasse* $\mathbf{M}_2$ beinhaltet alle Maschinenmodelle P, für die gilt:

$$P\text{-}\textsc{Time}(\mathrm{Pol}(n)) = \mathbb{E}\text{-}\mathbb{W}^*\text{-TM-}\textsc{Spc}(\mathrm{Pol}(n))$$

- Wir haben uns um Präziseres gedrückt (vergleiche van Emde Boas):
  - keine Beschränkung auf „schöne“ Funktionen
  - keine Beschränkung des Wachstums von s bzw. t nach oben oder unten

Beispiele

erste Maschinenklasse

- Turingmaschinen
- parallele Turingmaschinen
- Zellularautomaten
- und noch mehr …

zweite Maschinenklasse

- parallele Registermaschinen
- uniforme Schaltkreisfamilien
- alternierende Turingmaschinen
- baumförmige Zellularautomaten
- Registermaschinen mit mächtigen Maschinenbefehlen
- und noch viele mehr …

Beziehung zwischen den Maschinenklassen

Was würden Sie vermuten?

- $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2$?
- $\mathbf{M}_1 \neq \mathbf{M}_2$?
- $\mathbf{M}_1 \subseteq \mathbf{M}_2$?
- $\mathbf{M}_1 \supseteq \mathbf{M}_2$?
- $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 = \emptyset$?

Beziehung zwischen den Maschinenklassen

Was würden Sie vermuten?

- $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2$?
- $\mathbf{M}_1 \neq \mathbf{M}_2$?
- $\mathbf{M}_1 \subseteq \mathbf{M}_2$?
- $\mathbf{M}_1 \supseteq \mathbf{M}_2$?
- $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 = \emptyset$?

Vorsicht!

Lemma

Falls **P** ungleich **PSPACE** ist, sind $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ disjunkt.

Beweis

Angenommen, M ist ein Modell in $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$.
Dann:

$$\begin{aligned}
\mathbf{PSPACE} &= \text{TM-}\textsc{Spc}(\text{Pol}(n)) && \\
&\subseteq M\text{-}\textsc{Time}(\text{Pol}(n)) && \text{da } M \in \mathbf{M}_2 \\
&\subseteq \text{TM-}\textsc{Time}(\text{Pol}(n)) && \text{da } M \in \mathbf{M}_1 \\
&= \mathbf{P}\ .
\end{aligned}$$

Lemma

1. Falls $\mathbf{P}$ nicht in POLYLOGSPACE enthalten ist, gibt es Probleme, für die man beim Übergang von Modellen aus $\mathbf{M}_1$ zu Modellen aus $\mathbf{M}_2$ keinen exponentiellen Speedup erhält.
2. Falls $\mathbf{P}$ nicht in POLYLOGSPACE enthalten ist, ist NLPRAM $\notin \mathbf{M}_2$.

Beweis

1. $\mathbf{P} \not\subseteq \textsc{Polylogspace} \Longrightarrow \mathbf{P} \not\subseteq \mathbf{M}_2\text{-}\textsc{Time}(\mathrm{Pol}(\log n))$
2. Falls NLPRAM $\in \mathbf{M}_2$ ist, gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \subseteq \text{NTM-}\textsc{Time}(\mathrm{Pol}(n)) &\subseteq \text{NLPRAM-}\textsc{Time}(O(\log n))\\ &\subseteq \text{TM-}\textsc{Spc}(\mathrm{Pol}(\log n))\\ &= \textsc{Polylogspace}\end{aligned}$$

Überblick

Maschinenklassen

Berechnungshypothesen

Literatur

- A. K. Chandra, L. J. Stockmeyer
  Alternation
  17th IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, 98-108, 1976.

- L. M. Goldschlager
  A universal interconnection pattern for parallel computers
  Journal of the ACM, Band 29, S. 1073–1086, 1982.

Parallele Berechnungshypothese

Ein Maschinenmodell P modelliert genau dann auf „vernünftige“ Art parallele Arbeitsweise, wenn gilt:

$$\text{TM-}\textsc{Spc} \overset{\text{pol}}{\approx} P\text{-}\textsc{Time}\ .$$

Satz

Für viele (fast? alle?) Maschinenmodelle P aus der zweiten Maschinenklasse kann man ein Komplexitätsmaß hardw definieren, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \text{TM-}\textsc{Spc-Rev} &\overset{\text{pol}}{\approx} P\text{-}\textsc{Hdw-Time} \\ P\text{-}\textsc{Hdw} &\overset{\text{pol}}{\approx} P\text{-}\textsc{Time} \end{aligned}$$

J.-W. Hong
Computation: Computability, Similarity and Duality
Pitman, London, 1986.

Erweiterte Parallele Berechnungshypothese

Ein Maschinenmodell P modelliert genau dann auf „vernünftige" Art parallele Arbeitsweise, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \text{TM-}\textsc{Spc-Rev} &\overset{\text{pol}}{\approx} P\text{-}\textsc{Hdw-Time} \\ P\text{-}\textsc{Hdw} &\overset{\text{pol}}{\approx} P\text{-}\textsc{Time} \end{aligned}$$

Zusammenfassung

- Erste und zweite Maschinenklasse sind ein Versuch, Ordnung in den Zoo der Modelle zu bringen.
- Die parallele Berechnungshypothese versucht, „vernünftige“ parallele Modelle zu charakterisieren.