

# Modelle der Parallelverarbeitung

## 3. Zellularautomaten

Thomas Worsch

Institut für Theoretische Informatik  
Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2020

# Überblick

Eindimensionale Zellularautomaten

Höherdimensionale Zellularautomaten

# Überblick

## Eindimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von  $L_{vv}$

Beziehungen zwischen ZA und TM bzw. PTM

## Höherdimensionale Zellularautomaten

# Überblick

## Eindimensionale Zellularautomaten

### Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von  $L_{vv}$

Beziehungen zwischen ZA und TM bzw. PTM

## Höherdimensionale Zellularautomaten

## Idee

- ▶  $\mathbb{W}_1$ -PTM mit einer Steuereinheit auf jedem Feld
  - ▶ Band dann nur noch nötig für
    - ▶ die Eingabe
    - ▶ die Kommunikation zwischen den Steuereinheiten
- ⇒ betrachte Kette endlicher Automaten,  
die direkt miteinander kommunizieren können
- ▶ tatsächlicher Ausgangspunkt für ZA war ein anderer ...

## Ursprung



John von Neumann

*Theory of Self-Reproducing Automata.*

(edited and completed by Arthur Burks)

University of Illinois Press, 1966.

## Definition von eindimensionalen ZA

Grundbestandteile:

- ▶ *Raum*:  $\mathbb{Z}$       «Anordnung aller Zellen»
- ▶ *Zustandsmenge*:  $S$
- ▶ *Konfiguration*:  $c : \mathbb{Z} \rightarrow S$   
Zustand von Zelle  $i$ :  $c(i)$  oder evtl.  $c_i$
- ▶ Menge aller Konfigurationen:  $C = S^{\mathbb{Z}}$

## Lokale Arbeitsweise von $\mathbb{Z}$ -CA

Idee:

- ▶ Jede Zelle ist ein endlicher Automat,
- ▶ der als Eingabe die Zustände von «Nachbar»-Zellen erhält.

Formal:

- ▶ *Nachbarschaft*: endliche Teilmenge  $N \subset \mathbb{Z}$   
Interpretation: relative Entfernungen der Nachbarzellen, d. h.  
Koordinatendifferenzen
- ▶ *lokale Überföhrungsfunktion*  $\delta : S^N \rightarrow S$



## Lokale Arbeitsweise von $\mathbb{Z}$ -CA

Beispiel:

►  $N = \{-1, 0, 1\}$

►  $\delta$ :

	$\ell(-1)$	$\ell(0)$	$\ell(1)$	$\delta(\ell)$
	0	0	0	0
	0	0	1	1
	0	1	0	1
	0	1	1	1
	1	0	0	0
	1	0	1	1
	1	1	0	1
	1	1	1	0

## Globale Arbeitsweise von $\mathbb{Z}$ -CA

*uniforme synchrone* Arbeitsweise:

- ▶ alle Zellen machen
- ▶ zu allen Zeitpunkten
- ▶ nach der gleichen lokalen Überföhrungsfunktion
- ▶ einen Schritt

formal:

- ▶ von Zelle  $i \in \mathbb{Z}$  in globaler Konfiguration  $c$   
*lokal beobachtete Konfiguration*:  $c_{i+N} : N \rightarrow S : n \mapsto c_{i+n}$
- ▶ *ein globaler Schritt*:  $\Delta : C \rightarrow C$ ,  
 $\forall c \in C \forall i \in \mathbb{Z}$  gilt:  $\Delta(c)(i) = \delta(c_{i+N})$

## Beispiel: Regel 110

lokal

$xyz$	$\delta$
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0

## Beispiel: Regel 110

lokal

$xyz$	$\delta$
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0

## Beispiel: Regel 110

lokal

$xyz$	$\delta$
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	0

## Beispiel: Regel 110

lokal

$xyz$	$\delta$
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0

## Beispiel: Regel 110

lokal

$xyz$	$\delta$
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	0

## Beispiel: Regel 110

lokal

$xyz$	$\delta$
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0



## Beispiel: Regel 110

lokal

$xyz$	$\delta$
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0

## Beispiel: Regel 110

lokal

$xyz$	$\delta$
000	0
001	1
<b>010</b>	<b>1</b>
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	<b>1</b>	<b>0</b>
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	<b>1</b>	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0

## Beispiel: Regel 110

lokal

$xyz$	$\delta$
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0

## Beispiel: Regel 110

lokal

$xyz$	$\delta$
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0

## Beispiel: Regel 110

lokal

$xyz$	$\delta$
000	0
001	1
010	1
<b>011</b>	<b>1</b>
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	<b>1</b>	<b>1</b>	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	<b>1</b>	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0

## Beispiel: Regel 110

lokal

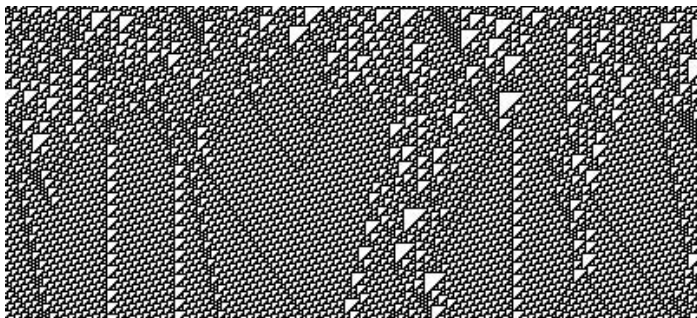
$xyz$	$\delta$
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
<b>110</b>	<b>1</b>
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	<b>1</b>	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0

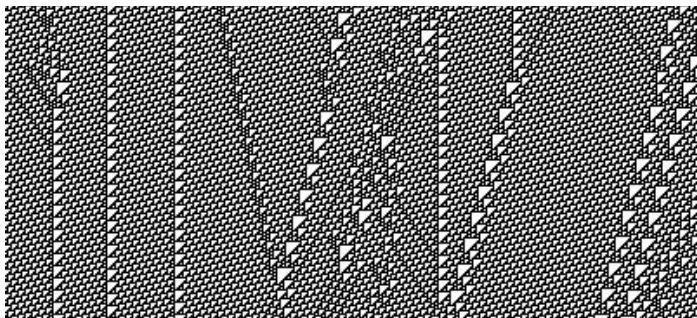
## Beispiel: Regel 110

- ▶ ein größerer Ausschnitt aus einem RZD mit zufälliger Anfangskonfiguration:



## Beispiel: Regel 110

- ▶ ein größerer Ausschnitt aus einem RZD mit zufälliger Anfangskonfiguration; Fortsetzung:



- ▶ Satz von Cook: Regel 110 ist sogar berechnungsuniversell.



## Beispiel: einfache Signale

	>					
		>				
			>			
				>		
				<		
			<			
		<				

$\ell(-1)$	$\ell(0)$	$\ell(1)$	$\delta(\ell)$
⋮	⋮	⋮	⋮
□	>	□	□
>	□	□	>
>	□		>
□	>		<
□	<		□
□	<	□	□
□	□	<	<
⋮	⋮	⋮	⋮

## Beispiel: einfache Signale (2)

	>					
		>				
			>			
				<		
			<			
		<				

$\ell(-1)$	$\ell(0)$	$\ell(1)$	$\delta(\ell)$
⋮	⋮	⋮	⋮
□	>	□	□
>	□	□	>
>	□		<
□	<		□
□	<	□	□
□	□	<	<
⋮	⋮	⋮	⋮

## Beispiel: einfache Signale (3)

	1>				
	2>				
		1>			
		2>			
			1>		
			2>		
				1>	
				2>	

beliebige konstante rationale Geschwindigkeiten realisierbar

# Überblick

## Eindimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

**Erkennung formaler Sprachen**

Komplexitätsmaße

Erkennung von  $L_{vv}$

Beziehungen zwischen ZA und TM bzw. PTM

## Höherdimensionale Zellularautomaten

## Eingabe von Wörtern

- ▶ Eingabealphabet  $A \subset S \setminus \{\square\}$
- ▶ Ruhezustand  $\square \in S$ 
  - ▶ Forderung:  $\delta(\square, \dots, \square) = \square$
- ▶ *Anfangskonfiguration* zu  $w$ :  
init :  $A^+ \rightarrow C : w_1 \cdots w_n \mapsto c$  mit

$$c(i) = \begin{cases} w_i & \text{falls } 1 \leq i \leq n \\ \square & \text{sonst} \end{cases}$$

## Halten und Akzeptieren

- ▶ Menge von Endzuständen  $F \subset S$
- ▶  $\text{isFinal} : C \rightarrow \mathbb{B} : c \mapsto [c(1) \in F]$
- ▶ Menge akzeptierender Endzustände  $F_+ \subset F$
- ▶  $\text{isAccepting} : C \rightarrow \mathbb{B} : c \mapsto [c(1) \in F_+]$

## Von ZA erkannte Sprache

- ▶  $L(C) = \{w \in A^+ \mid \text{isAccepting}(\Delta^{\text{time}(w)}(\text{init}(w)))\}$
- ▶ Definition von  $\text{time}(w)$ , etc. kommt gleich

## Beispiel eines ZA

- ▶ Erkenne  $L_{121} = \{1^k 2 1^k \mid k \in \mathbb{N}_+\}$



## Beispiel eines ZA

- ▶ Erkenne  $L_{121} = \{1^k 2 1^k \mid k \in \mathbb{N}_+\}$
- ▶ z. B. drei Phasen wie bei PTM:
  - ▶ suche die erste 2
  - ▶ vergleiche Abstand vom linken und rechten Rand  
prüfe ob ansonsten nur 1
  - ▶ Ergebnis ans linke Ende transportieren

# Überblick

## Eindimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

**Komplexitätsmaße**

Erkennung von  $L_{vv}$

Beziehungen zwischen ZA und TM bzw. PTM

## Höherdimensionale Zellularautomaten

## Zeitkomplexität von ZA

- ▶ Wie immer ...:

$$\text{time} : A^+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$w \mapsto \min\{t \in \mathbb{N}_+ \mid \text{isFinal}(\Delta^t(\text{init}(w)))\}$$

$$\text{Time} : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$n \mapsto \max\{\text{time}(w) \mid w \in A^n\}$$

## Raumkomplexität von ZA

- ▶ analog zu TM:

$$\text{used-mem} : C \rightarrow 2^{\mathbb{Z}}$$

$$c \mapsto \{i \in \mathbb{Z} \mid c(i) \neq \square\}$$

$$\text{space} : A^+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$w \mapsto \left| \bigcup_{t \leq \text{time}(w)} \text{used-mem}(\Delta^t(\text{init}(w))) \right|$$

$$\text{Space} : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$n \mapsto \max\{\text{space}(w) \mid w \in A^n\}$$

## Zustandsänderungskomplexität von ZA

- ▶ Betrachte die Anzahl *echter Zustandsänderungen* im Laufe einer Berechnung.
- ▶ Motivation: In CMOS-Technologie kosten vor allem die *Bitänderungen* Energie.



Roland Vollmar

Some Remarks about the “Efficiency” of Polyautomata.

*International Journal of Theoretical Physics*, 21(12):1007–1015, 1982.

## Zustandsänderungskomplexität von ZA (2)

► definiere:

$$\text{chn}' : C \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$c \mapsto |\{i \in \mathbb{Z} \mid \delta(c_{i+N}) \neq c_i\}|$$

$$\text{chn} : A^+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$w \mapsto \sum_{t=0}^{\text{time}(w)-1} \text{chn}'(\Delta^t(\text{init}(w)))$$

$$\text{Chng} : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$n \mapsto \max\{\text{chn}(w) \mid w \in A^n\}$$

## Zustandsänderungskomplexität von ZA (3)

- ▶ Komplexitätsklassen:

$$\mathbb{Z}\text{-CA-CHNG}(p(n))-\dots$$

- ▶ Beachte: Es ist stets  $\text{Chng}(n) \in \Omega(\text{Time}(n))$

# Überblick

## Eindimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

**Erkennung von  $L_{vv}$**

Beziehungen zwischen ZA und TM bzw. PTM

## Höherdimensionale Zellularautomaten



## $L_{vv}$ : Verschiedene Erkennungsmöglichkeiten

## $L_{UV}$ : Verschiedene Erkennungsmöglichkeiten

- ▶ benutze ein Signal, um eine TM zu simulieren
- ▶ benutze mehr oder weniger viele Signale, um eine PTM zu simulieren
- ▶ «direkte» Verfahren

## Ergebnisse

Simulation einer  $\mathbb{W}_1$ -TM ergibt

$$L_{vv} \in \mathbb{Z}\text{-CA-SPC}(\Theta(n))\text{-TIME}(\Theta(n^2))\text{-CHNG}(\Theta(n^2))$$

## Ergebnisse

Simulation einer  $\mathbb{W}_1$ -TM ergibt

$$L_{vv} \in \mathbb{Z}\text{-CA-SPC}(\Theta(n))\text{-TIME}(\Theta(n^2))\text{-CHNG}(\Theta(n^2))$$

Simulation der schnellen  $\mathbb{W}_1$ -PTM und schnelle direkte Methoden ergeben:

**Satz**

$$L_{vv} \in \mathbb{Z}\text{-CA-SPC}(\Theta(n))\text{-TIME}(\Theta(n))\text{-CHNG}(\Theta(n^2))$$

Kann man da noch effizienter werden?

## Eine untere Schranke für $L_{vv}$

- ▶ Eine «*knapp-über-log*»-Funktion sei eine nicht-fallende Funktion  $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{f(n)} = 0.$$

### Satz

Für jeden eindimensionalen ZA, der  $L_{vv}$  erkennt, und jede knapp-über-log-Funktion  $f$  gilt:

$$\text{Chng}(n) \in \Omega(n^2/f(n))$$

Beachte: Der interessante Fall sind *langsam* wachsende  $f(n)$ .

## Eine untere Schranke für $L_{vv}$ : Beweis (1)

- ▶ grundlegende Idee: Überquerungsfolgen ähnlich wie bei Turingmaschinen



P. Sanders, R. Vollmar, T. Worsch

Cellular Automata: Energy Consumption and Physical Feasibility.

*Fundamenta Informaticae* 52, S. 233-248, 2002.

## Eine untere Schranke für $L_{vv}$ : Beweis (2)

- ▶  $\langle w \rangle$  bezeichne das Raum-Zeit-Diagramm für Eingabe  $w$ ,  
i. e.  $\langle w \rangle : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow Q$  mit  $\langle w \rangle(i, \tau) = \Delta^\tau(\text{init } w)(i)$
- ▶ Einschränkung auf Teilmenge  $M$  von Zellen:  $\langle w|M \rangle : M \times \mathbb{N} \rightarrow Q$
- ▶ Sei  $\mathbb{Z} = M_1 \dot{\cup} M_2$  eine Partitionierung der Zellmenge und  $K$  die  
«Grenze» zwischen  $M_1$  and  $M_2$ :

$$K = \{i \in M_1 \mid \exists n \in \mathbb{N} : i + n \in M_2\} \\ \cup \{i \in M_2 \mid \exists n \in \mathbb{N} : i + n \in M_1\}$$

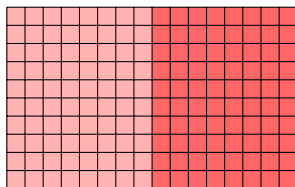
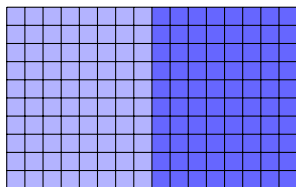
- ▶ Die  $\langle w|K \rangle$  übernehmen die Rolle der Überquerungsfolgen.

## Eine untere Schranke für $L_{vv}$ : Beweis (3a)

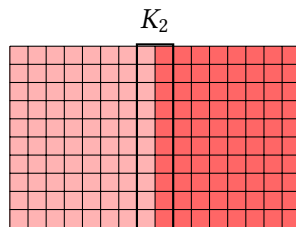
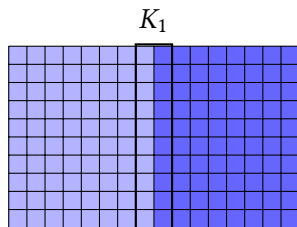
- ▶ Skizze auf nächster Folie
- ▶ Details für allgemeinere Aufgabenstellung: in Kapitel 10



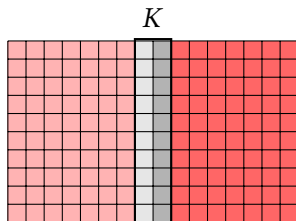
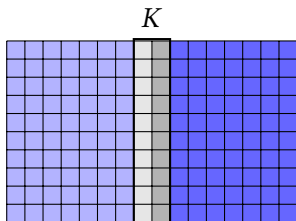
## Eine untere Schranke für $L_{vv}$ : Beweisskizze (3b)



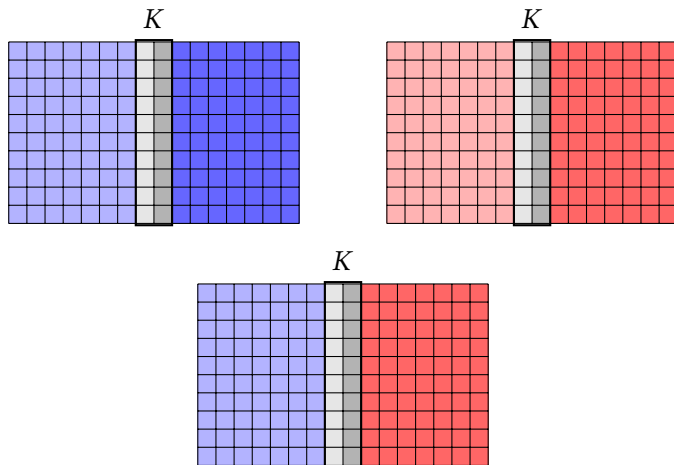
## Eine untere Schranke für $L_{vv}$ : Beweisskizze (3b)



## Eine untere Schranke für $L_{vv}$ : Beweisskizze (3b)



## Eine untere Schranke für $L_{vv}$ : Beweisskizze (3b)



# Überblick

## Eindimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von  $L_{vv}$

Beziehungen zwischen ZA und TM bzw. PTM

## Höherdimensionale Zellularautomaten

## Zusammenhang von ZA mit $\mathbb{W}_1$ -TM

### Satz

Für  $s(n) \geq n$  und  $t(n) \geq n$  gilt:

$$\mathbb{W}_1\text{-TM-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t)) \\ \subseteq \mathbb{Z}\text{-CA-SPC}(\quad)\text{-TIME}(\quad)\text{-CHNG}(\quad)$$

## Zusammenhang von ZA mit $\mathbb{W}_1$ -TM

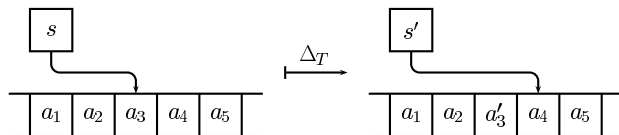
### Satz

Für  $s(n) \geq n$  und  $t(n) \geq n$  gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_1\text{-TM-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t)) \\ \subseteq \mathbb{Z}\text{-CA-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t))\text{-CHNG}(\Theta(t)) \end{aligned}$$

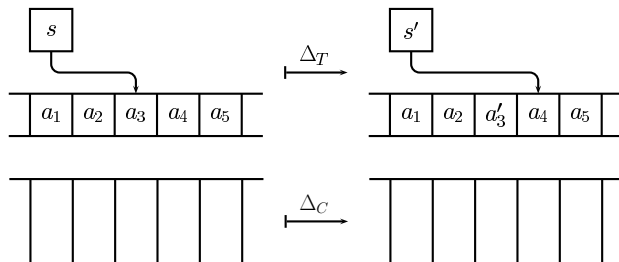
Beachte:  $\text{Chng} \in \Theta(\text{Time})$  ist optimal.

## Zusammenhang von ZA mit $\mathbb{W}_1$ -TM: Beweisidee

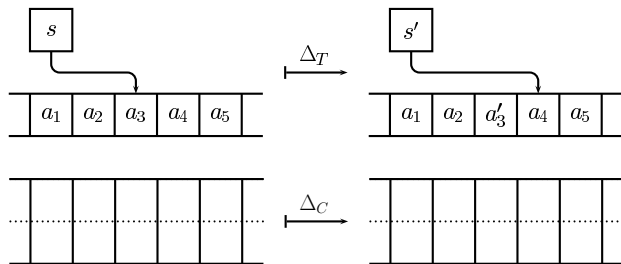




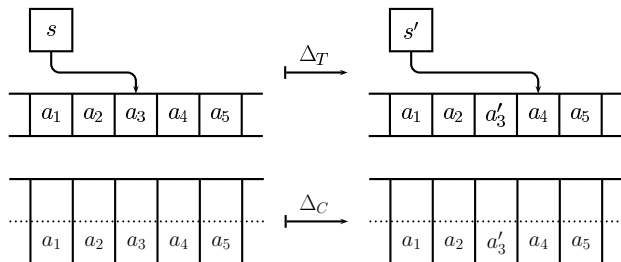
## Zusammenhang von ZA mit $\mathbb{W}_1$ -TM: Beweisidee



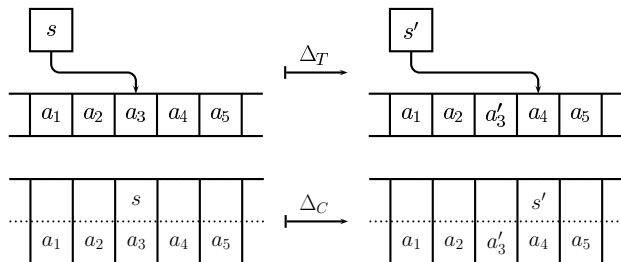
## Zusammenhang von ZA mit $\mathbb{W}_1$ -TM: Beweisidee



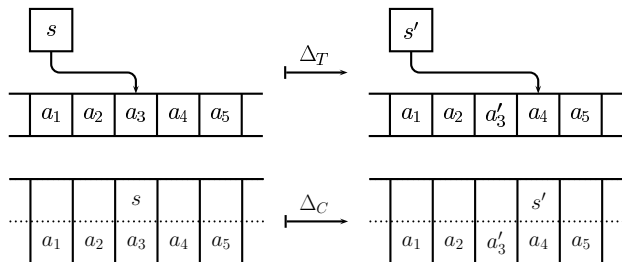
## Zusammenhang von ZA mit $\mathbb{W}_1$ -TM: Beweisidee



## Zusammenhang von ZA mit $\mathbb{W}_1$ -TM: Beweisidee



## Zusammenhang von ZA mit $\mathbb{W}_1$ -TM: Beweisidee



- ▶ setze  $Q_C = (Q_T \dot{\cup} \{-\}) \times B_T$
- ▶ repräsentiere  $c_T = (s, b, p)$  durch  $c_C$ 

$$c_C : \mathbb{Z} \rightarrow Q_C$$

$$i \mapsto \begin{cases} (s, b(p)) & \text{falls } i = p \\ (-, b(i)) & \text{falls } i \neq p \end{cases}$$
- ▶  $\delta_C = ?$

## Zusammenhang von ZA mit $\mathbb{W}_1$ -TM: Beweis (2)

lokale Überföhrungsfunktion:

$$\delta_C((- , a), (- , b), (- , c)) = (- , b)$$

$$\delta_C((s, a), (- , b), (- , c)) = \begin{cases} (s', b) & \text{falls } \delta_T(s, a) = (s', a', 1) \\ (- , b) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta_C((- , a), (s, b), (- , c)) = \begin{cases} (s', b') & \text{falls } \delta_T(s, b) = (s', b', 0) \\ (- , b') & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta_C((- , a), (- , b), (s, c)) = \begin{cases} (s', b) & \text{falls } \delta_T(s, c) = (s', c', -1) \\ (- , b) & \text{sonst} \end{cases}$$

Andere Kombinationen von Argumenten können nicht auftreten:  
Festlegung der Funktionswerte willkürlich

## Zusammenhang von ZA mit $*W_1$ -TM

### Satz

Für  $s \geq id$  und  $t \geq id$  gilt:

$$\begin{aligned}
 *W_1\text{-TM-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t)) \\
 \subseteq \mathbb{Z}\text{-CA-SPC}(\quad)\text{-TIME}(\quad)\text{-CHNG}(\quad)
 \end{aligned}$$

## Zusammenhang von ZA mit $*W_1$ -TM

### Satz

Für  $s \geq id$  und  $t \geq id$  gilt:

$$\begin{aligned} *W_1\text{-TM-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t)) \\ \subseteq \mathbb{Z}\text{-CA-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t))\text{-CHNG}(\Theta(s \cdot t)) \end{aligned}$$

Beachte:  $L_{vv}$  zeigt, dass im Fall  $s(n) = t(n) = n$  ein kleineres  $\text{Chng}(\cdot)$  «im allgemeinen» «kaum» möglich ist.



## Zusammenhang von ZA mit $*W_1$ -TM: Beweisidee

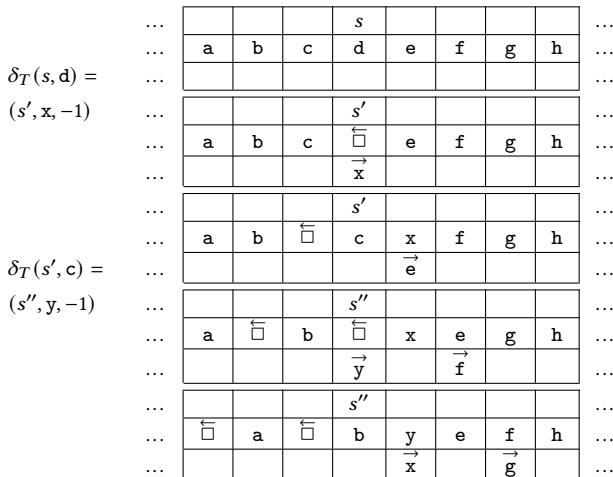
- ▶ analog zum Fall  $W_1$ , aber
- ▶ verschiebe jedes «Band» statt des Zustandes
- ▶ dafür zweierlei Sorten von Signalen:
  - ▶ in Verschiebungsrichtung:  
Signal mit «überschüssigem Symbol»
  - ▶ entgegen Verschiebungsrichtung:  
Signal mit «Lücke»

## Band- statt Kopfverschiebung (ein Band) (1)

$$\delta_T(s, d) = (s', x, -1)$$

...				s					...
...	a	b	c	d	e	f	g	h	...
...									...
...				s'					...
...	a	b	c	$\overleftarrow{\square}$	e	f	g	h	...
...				$\overrightarrow{x}$					...
...				s'					...
...	a	b	$\overleftarrow{\square}$	c	x	f	g	h	...
...					$\overrightarrow{e}$				...
...				s'					...
...	a	$\overleftarrow{\square}$	b	c	x	e	g	h	...
...						$\overrightarrow{f}$			...
...				s'					...
...	$\overleftarrow{\square}$	a	b	c	x	e	f	h	...
...							$\overrightarrow{g}$		...

## Band- statt Kopfverschiebung (ein Band) (2)



## Zusammenhang von ZA mit $*W_*$ -TM

Konstruktion von Stoß:

### Satz

Für alle  $t(n) \geq n$  gilt:

$$*W_*\text{-TM-TIME}(t) \subseteq *W_1\text{-TM-TIME}(\Theta(t))$$

Also gilt auch:

### Korollar

$$\begin{aligned} &*W_*\text{-TM-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t)) \\ &\subseteq \mathbb{Z}\text{-CA-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t))\text{-CHNG}(\Theta(st)) \end{aligned}$$

# Überblick

## Eindimensionale Zellularautomaten

## Höherdimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von  $L_{pal}$  und  $L_{vv}$

Beziehungen zwischen verschiedenen Modellen

# Überblick

Eindimensionale Zellularautomaten

Höherdimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von  $L_{pal}$  und  $L_{vv}$

Beziehungen zwischen verschiedenen Modellen

## Definition

- ▶ *Raum*:  $R = \mathbb{Z}^d$
- ▶ *Zustandsmenge*:  $S$
- ▶ *Konfiguration*:  $c : R \rightarrow S$   
Zustand von Zelle  $i$ :  $c(i)$  oder evtl.  $c_i$
- ▶ Menge aller Konfigurationen:  $C = S^R$
- ▶ endliche *Nachbarschaft*:  $N \subset R$   
(relative Entfernungen, d. h. Koordinatendifferenzen)
- ▶ *lokale Überföhrungsfunktion*  $\delta : S^N \rightarrow S$
- ▶ von Zelle  $i \in R$  in globaler Konfiguration  $c$  *beobachtete lokale Konfiguration*:  $c_{i+N} : N \rightarrow S : n \mapsto c_{i+n}$
- ▶ *ein globaler Schritt*:  $\Delta : C \rightarrow C$ ,  
 $\forall c \in C \forall i \in R$  gilt:  $\Delta(c)(i) = \delta(c_{i+N})$

## Standardnachbarschaften

- ▶ *von Neumann-Nachbarschaft* mit Radius  $r$ :

$$H_r^{(d)} = \left\{ (x_1, \dots, x_d) \mid \sum_{1 \leq i \leq d} |x_i| \leq r \right\}$$

- ▶ *Moore-Nachbarschaft* mit Radius  $r$ :

$$M_r^{(d)} = \left\{ (x_1, \dots, x_d) \mid \max_{1 \leq i \leq d} |x_i| \leq r \right\}$$

- ▶ Für  $d = 1$  stimmen beide überein.



# Überblick

## Eindimensionale Zellularautomaten

## Höherdimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

**Erkennung formaler Sprachen**

Komplexitätsmaße

Erkennung von  $L_{pal}$  und  $L_{vv}$

Beziehungen zwischen verschiedenen Modellen

## Möglichkeiten der Eingabe

Wie gibt man eindimensionale Wörter in einen  $d$ -dimensionalen ZA ein?

## Möglichkeiten der Eingabe

Wie gibt man eindimensionale Wörter in einen  $d$ -dimensionalen ZA ein?

- ▶ eindimensional
- ▶ 2-dimensional: ca.  $\sqrt{n}$  Bruchstücke der Länge  $\lceil \sqrt{n} \rceil$ 
  - ▶ in «row major» Anordnung
  - ▶ in Schlangenlinienform
  - ▶ ...
- ▶ 2-dimensional: z. B. als Spirale, ...
- ▶ 3-, ...,  $d$ -dimensional:  
diverse Möglichkeiten analog 2-dim. Fall
- ▶ sequenziell «von außen»

## Halten und Akzeptieren

analog zu  $\mathbb{Z}$ -CA:

- ▶ Menge von Endzuständen  $F \subset S$
- ▶  $\text{isFinal} : C \rightarrow \mathbb{B} : c \mapsto [c(e) \in F]$ 
  - ▶ Dabei sei  $e$  die Zelle mit dem ersten Eingabesymbol.
- ▶ Menge akzeptierender Endzustände  $F_+ \subset F$
- ▶  $\text{isAccepting} : C \rightarrow \mathbb{B} : c \mapsto [c(e) \in F_+]$

## Beispiel: Erkennung regulärer Sprachen

in  $\mathbb{Z}^2$ -CA:

- ▶ mit sequenzieller Eingabe «von außen»: klar

## Beispiel: Erkennung regulärer Sprachen

in  $\mathbb{Z}^2$ -CA:

- ▶ mit sequenzieller Eingabe «von außen»: klar  
Zeitbedarf  $\Theta(n)$

## Beispiel: Erkennung regulärer Sprachen

in  $\mathbb{Z}^2$ -CA:

- ▶ mit sequenzieller Eingabe «von außen»: klar  
Zeitbedarf  $\Theta(n)$
- ▶ mit eindimensionaler Eingabe: klar

## Beispiel: Erkennung regulärer Sprachen

in  $\mathbb{Z}^2$ -CA:

- ▶ mit sequenzieller Eingabe «von außen»: klar  
Zeitbedarf  $\Theta(n)$
- ▶ mit eindimensionaler Eingabe: klar  
Zeitbedarf  $\Theta(n)$



## Beispiel: Erkennung regulärer Sprachen

in  $\mathbb{Z}^2$ -CA:

- ▶ mit sequenzieller Eingabe «von außen»: klar  
Zeitbedarf  $\Theta(n)$
- ▶ mit eindimensionaler Eingabe: klar  
Zeitbedarf  $\Theta(n)$
- ▶ mit «quadratischer» Eingabe in «row major» Form:

## Beispiel: Erkennung regulärer Sprachen

in  $\mathbb{Z}^2$ -CA:

- ▶ mit sequenzieller Eingabe «von außen»: klar  
Zeitbedarf  $\Theta(n)$
- ▶ mit eindimensionaler Eingabe: klar  
Zeitbedarf  $\Theta(n)$
- ▶ mit «quadratischer» Eingabe in «row major» Form:  
Zeitbedarf  $\Theta(\sqrt{n})$  z. B. so:

## Beispiel: Erkennung regulärer Sprachen

in  $\mathbb{Z}^2$ -CA:

- ▶ mit sequenzieller Eingabe «von außen»: klar  
Zeitbedarf  $\Theta(n)$
- ▶ mit eindimensionaler Eingabe: klar  
Zeitbedarf  $\Theta(n)$
- ▶ mit «quadratischer» Eingabe in «row major» Form:  
Zeitbedarf  $\Theta(\sqrt{n})$  z. B. so:
  - ▶ bearbeite alle Teilstücke der Länge  $\lceil \sqrt{n} \rceil$  gleichzeitig,
  - ▶ sammle in einer Spalte alle «Teilergebnisse» ein und
  - ▶ errechne daraus das Gesamtergebnis
  - ▶ Details «Übungsaufgabe»

# Überblick

## Eindimensionale Zellularautomaten

## Höherdimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

**Komplexitätsmaße**

Erkennung von  $L_{pal}$  und  $L_{vv}$

Beziehungen zwischen verschiedenen Modellen

## Zeitkomplexität von $\mathbb{Z}^d$ -CA

wie bei  $\mathbb{Z}$ -CA etc.

## Raumkomplexität von $\mathbb{Z}^d$ -CA

Was will man messen? (und warum?)

## Raumkomplexität von $\mathbb{Z}^d$ -CA

Was will man messen? (und warum?)

- ▶ die Anzahl benutzter Zellen
  - ▶ Speicherkomplexität  $\text{Space}(n)$
- ▶ die Seitenlänge des kleinsten Würfels (oder Quaders?), der alle benutzten Zellen umschließt?
  - ▶ «Ausdehnungskomplexität»  $\text{Ext}(n)$

(weiterer Hinweis auf die Unterschiedlichkeit von 1- und 2-dim.. ZA ...)

## Erkennungskomplexität regulärer Sprachen

- ▶ sequenzielle Eingabe «von außen»:  
 $\text{Space}(n) = \text{Ext}(n) = 1$  und  $\text{Time}(n) = n$
- ▶ eindimensionale Eingabe:  
 $\text{Space}(n) = \text{Ext}(n) = n$  und  $\text{Time}(n) = n$
- ▶ zweidimensionale Eingabe:



## Erkennungskomplexität regulärer Sprachen

- ▶ sequenzielle Eingabe «von außen»:  
 $\text{Space}(n) = \text{Ext}(n) = 1$  und  $\text{Time}(n) = n$
- ▶ eindimensionale Eingabe:  
 $\text{Space}(n) = \text{Ext}(n) = n$  und  $\text{Time}(n) = n$
- ▶ zweidimensionale Eingabe:  
 $\text{Space}(n) = n$ ,  $\text{Ext}(n) = \sqrt{n}$  und  $\text{Time}(n) = \sqrt{n}$
- ▶  $d$ -dimensionale Eingabe:  
 $\text{Space}(n) = n$ ,  $\text{Ext}(n) = n^{1/d}$  und  $\text{Time}(n) = n^{1/d}$

# Überblick

## Eindimensionale Zellularautomaten

## Höherdimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von  $L_{pal}$  und  $L_{vv}$

Beziehungen zwischen verschiedenen Modellen

► Erkennung von  $L_{pal}$

- ▶ Erkennung von  $L_{pal}$ 
  - ▶ eindimensionale Eingabe:
    - ▶ in Zeit  $n$
  - ▶ zweidimensionale Eingabe:
    - ▶ in Zeit  $\Theta(\sqrt{n})$

- ▶ Erkennung von  $L_{pal}$ 
  - ▶ eindimensionale Eingabe:
    - ▶ in Zeit  $n$
  - ▶ zweidimensionale Eingabe:
    - ▶ in Zeit  $\Theta(\sqrt{n})$
    - ▶ Drehung des Musters um  $180^\circ$  und Vergleich mit dem Original (mehr Details gleich)

- ▶ Erkennung von  $L_{pal}$ 
  - ▶ eindimensionale Eingabe:
    - ▶ in Zeit  $n$
  - ▶ zweidimensionale Eingabe:
    - ▶ in Zeit  $\Theta(\sqrt{n})$
    - ▶ Drehung des Musters um  $180^\circ$  und Vergleich mit dem Original (mehr Details gleich)
- ▶ Erkennung von  $L_{vv}$ :
  - ▶ analoge Geschwindigkeiten erreichbar
  - ▶ Übung

## Rotation um $90^\circ$

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>V</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>G</i>
<i>U</i>	<i>n</i>	1	2	<i>e</i>	<i>H</i>
<i>T</i>	<i>m</i>	4	3	<i>f</i>	<i>I</i>
<i>S</i>	<i>k</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>g</i>	<i>K</i>
<i>R</i>	<i>Q</i>	<i>P</i>	<i>N</i>	<i>M</i>	<i>L</i>

Rotation um  $90^\circ$ 

$\downarrow \overleftarrow{A}$	$\overleftarrow{B}$	$\overleftarrow{C}$	$\overleftarrow{D}$	$\overleftarrow{E}$	$\overleftarrow{F} \uparrow$
$\downarrow V$	$a$	$b$	$c$	$d$	$G \uparrow$
$\downarrow U$	$n$	1	2	$e$	$H \uparrow$
$\downarrow T$	$m$	4	3	$f$	$I \uparrow$
$\downarrow S$	$k$	$i$	$h$	$g$	$K \uparrow$
$\downarrow \overrightarrow{R}$	$\overrightarrow{Q}$	$\overrightarrow{P}$	$\overrightarrow{N}$	$\overrightarrow{M}$	$\overrightarrow{L} \uparrow$



Rotation um  $90^\circ$ 

$$\downarrow \overleftarrow{B} \quad \overleftarrow{C} \quad \overleftarrow{D} \quad \overleftarrow{E} \quad \overleftarrow{F} \quad \overleftarrow{G} \uparrow$$

$$\downarrow A \quad \downarrow \overleftarrow{a} \quad \overleftarrow{b} \quad \overleftarrow{c} \quad \overleftarrow{d} \uparrow \quad H \uparrow$$

$$\downarrow V \quad \downarrow n \quad 1 \quad 2 \quad e \uparrow \quad I \uparrow$$

$$\downarrow U \quad \downarrow m \quad 4 \quad 3 \quad f \uparrow \quad K \uparrow$$

$$\downarrow T \quad \downarrow \overrightarrow{k} \quad \overrightarrow{i} \quad \overrightarrow{h} \quad \overrightarrow{g} \uparrow \quad L \uparrow$$

$$\downarrow \overrightarrow{S} \quad \overrightarrow{R} \quad \overrightarrow{Q} \quad \overrightarrow{P} \quad \overrightarrow{N} \quad \overrightarrow{M} \uparrow$$

Rotation um  $90^\circ$ 

$$\downarrow \overleftarrow{C} \quad \overleftarrow{D} \quad \overleftarrow{E} \quad \overleftarrow{F} \quad \overleftarrow{G} \quad \overleftarrow{H} \uparrow$$

$$\downarrow B \quad \downarrow \overleftarrow{b} \quad \overleftarrow{c} \quad \overleftarrow{d} \quad \overleftarrow{e} \uparrow \quad I \uparrow$$

$$\downarrow A \quad \downarrow a \quad \downarrow \overleftarrow{1} \quad \overleftarrow{2} \uparrow \quad f \uparrow \quad K \uparrow$$

$$\downarrow V \quad \downarrow n \quad \downarrow \overleftarrow{4} \quad \overleftarrow{3} \uparrow \quad g \uparrow \quad L \uparrow$$

$$\downarrow U \quad \downarrow \overrightarrow{m} \quad \overrightarrow{k} \quad \overrightarrow{i} \quad \overrightarrow{h} \uparrow \quad M \uparrow$$

$$\downarrow \overrightarrow{T} \quad \overrightarrow{S} \quad \overrightarrow{R} \quad \overrightarrow{Q} \quad \overrightarrow{P} \quad \overrightarrow{N} \uparrow$$

Rotation um  $90^\circ$ 

$$\downarrow \overleftarrow{D} \quad \overleftarrow{E} \quad \overleftarrow{F} \quad \overleftarrow{G} \quad \overleftarrow{H} \quad \overleftarrow{I} \uparrow$$

$$\downarrow C \quad \downarrow \overleftarrow{c} \quad \overleftarrow{d} \quad \overleftarrow{e} \quad \overleftarrow{f} \uparrow \quad K \uparrow$$

$$\downarrow B \quad \downarrow b \quad 2 \quad 3 \quad g \uparrow \quad L \uparrow$$

$$\downarrow A \quad \downarrow a \quad 1 \quad 4 \quad h \uparrow \quad M \uparrow$$

$$\downarrow V \quad \downarrow \overrightarrow{n} \quad \overrightarrow{m} \quad \overrightarrow{k} \quad \overrightarrow{i} \uparrow \quad N \uparrow$$

$$\downarrow \overrightarrow{U} \quad \overrightarrow{T} \quad \overrightarrow{S} \quad \overrightarrow{R} \quad \overrightarrow{Q} \quad \overrightarrow{P} \uparrow$$

Rotation um  $90^\circ$ 

$\downarrow \overleftarrow{E}$	$\overleftarrow{F}$	$\overleftarrow{G}$	$\overleftarrow{H}$	$\overleftarrow{I}$	$\overleftarrow{K} \uparrow$
$\downarrow D$	$d$	$e$	$f$	$g$	$L \uparrow$
$\downarrow C$	$c$	$2$	$3$	$h$	$M \uparrow$
$\downarrow B$	$b$	$1$	$4$	$i$	$N \uparrow$
$\downarrow A$	$a$	$n$	$m$	$k$	$P \uparrow$
$\downarrow \overrightarrow{V}$	$\overrightarrow{U}$	$\overrightarrow{T}$	$\overrightarrow{S}$	$\overrightarrow{R}$	$\overrightarrow{Q} \uparrow$

## Rotation um $90^\circ$

<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>K</i>	<i>L</i>
<i>E</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>M</i>
<i>D</i>	<i>c</i>	2	3	<i>h</i>	<i>N</i>
<i>C</i>	<i>b</i>	1	4	<i>i</i>	<i>P</i>
<i>B</i>	<i>a</i>	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>k</i>	<i>Q</i>
<i>A</i>	<i>V</i>	<i>U</i>	<i>T</i>	<i>S</i>	<i>R</i>

# Überblick

## Eindimensionale Zellularautomaten

## Höherdimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von  $L_{pal}$  und  $L_{vv}$

Beziehungen zwischen verschiedenen Modellen

## Von TM zu $d$ -dimensionalen ZA

### Satz

Wenn  $s(n)$  effizient konstruierbar ist und die «Eingabemodalitäten» passen, gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_1\text{-TM-SPC}(s)\text{-TIME}(t) \\ \subseteq \mathbb{Z}^d\text{-CA-EXT}(\Theta(s^{1/d}))\text{-TIME}(\Theta(t)) \\ \subseteq \mathbb{Z}^d\text{-CA-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t)) \end{aligned}$$

Offen: Hilft zusätzliches Wissen über die Arbeitsweise der TM beim Zeitbedarf des ZA? (*studentische Arbeit?*)

## Beweisidee

an der Tafel:



## Beweisidee

an der Tafel:

- ▶ würfelfüllende Kurve, z. B. Schlangenlinie

## Beweisidee

an der Tafel:

- ▶ würfelfüllende Kurve, z. B. Schlangenlinie
- ▶ Überlegung:
  - ▶ Das funktioniert sogar für die Simulation von  $\mathbb{Z}^1$ -CA,
  - ▶ z. B. falls die Eingabeform passt,
  - ▶ oder falls genug Zeit zur Umformung der Eingabe zur Verfügung steht ...

## Dimensionserhöhung bei ZA

- ▶ wenn man die zusätzlichen Dimensionen *nicht* benutzt:
  - ▶ einfach
  - ▶ Volumen der kleinsten umschließenden Würfel wächst
- ▶ wenn man die zusätzlichen Dimensionen benutzt:
  - ▶ bei Übergang von 2 nach 3 Dimensionen bekannt:  
Ausdehnung kann *ohne Zeitverlust* von  $e(n)$  auf  $e^{2/3}(n)$  geschrumpft werden (gleiches Volumen)



A. Achilles, M. Kutrib, T. Worsch

On Relations between Arrays of Processing Elements of Different Dimensionality.

[Proceedings Parcella 1996, 13–20.](#)

- ▶ relativ aufwändig
- ▶ offen: Verallgemeinerung z. B. auf höhere Dimensionen (*studentische Arbeit?*)

## Von ZA zu TM

### Satz

Wenn  $e(n)$  effizient konstruierbar ist, gilt:

$$\mathbb{Z}^d\text{-CA-EXT}(e)\text{-TIME}(t) \subseteq \mathbb{W}_1\text{-TM-SPC}(\Theta(e^d))\text{-TIME}(\text{Pol}(t))$$

## Bemerkungen

- ▶ Beweisidee sollte klar sein, oder?
- ▶ meines Wissens offen: Gilt auch

$$\mathbb{Z}^d\text{-CA-SPC}(s)\text{-TIME}(t) \subseteq \mathbb{W}_1\text{-TM-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\text{Pol}(t))$$

unter halbwegs allgemeinen, plausiblen Annahmen? (*stud. Arbeit?*)

- ▶ offen: Helfen zusätzliche TM-Köpfe? (*stud. Arbeit?*)
- ▶ Ähnliches beim Übergang von hoch- zu niedrig-dim. ZA:



C. Scheben

Simulation of  $d'$ -Dimensional Cellular Automata on  
 $d$ -Dimensional Cellular Automata  
Proceedings ACRI 2006, 131-140.

## Zusammenfassung

- ▶ ZA können in jedem Schritt eine «große» Informationsmenge über eine «kleine» Entfernung transportieren. Das ist mindestens ebenso mächtig wie der Transport einer «kleinen» Informationsmenge über eine «große» Entfernung bei TM.
- ▶ In höherdimensionalen ZA ist es wichtig, auf die genauen Formalisierungen z. B. von Eingabe und Komplexitätsmaßen zu schauen.
- ▶ TM, PTM und ZA können sich alle(?) auf linearem Platz in polynomieller Zeit gegenseitig simulieren.

## Zusammenfassung der ersten drei Kapitel

Für

- ▶ beliebige Modelle  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{M}'$  aus den Kapiteln über
  - ▶ Turingmaschinen
  - ▶ parallele Turingmaschinen
  - ▶ Zellularautomaten
- ▶ und (nahezu) beliebige Schranken  $s$  und  $t$  gilt:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}\text{-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\text{Pol}(t)) \\ &= \mathcal{M}'\text{-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\text{Pol}(t)) \end{aligned}$$