

Modelle der Parallelverarbeitung

3. Zellularautomaten

Thomas Worsch

Institut für Theoretische Informatik
Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2018

Überblick

Eindimensionale Zellularautomaten

Höherdimensionale Zellularautomaten

Überblick

Eindimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von L_{vv}

Beziehungen zwischen ZA und TM bzw. PTM

Höherdimensionale Zellularautomaten

Überblick

Eindimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von L_{vv}

Beziehungen zwischen ZA und TM bzw. PTM

Höherdimensionale Zellularautomaten

Idee

- ▶ W_1 -PTM mit einer Steuereinheit auf jedem Feld:
 - ▶ Band ist dann überflüssig,
 - ▶ außer für die Eingabe
- ⇒ betrachte Kette endlicher Automaten,
die direkt miteinander kommunizieren können
- ▶ tatsächlicher Ausgangspunkt für ZA war ein anderer ...

Ursprung



John von Neumann

Theory of Self-Reproducing Automata.

(edited and completed by Arthur Burks)

University of Illinois Press, 1966.

Definition von eindimensionalen ZA

Grundbestandteile:

- ▶ *Raum*: \mathbb{Z} «Anordnung aller Zellen»
- ▶ *Zustandsmenge*: S
- ▶ *Konfiguration*: $c : \mathbb{Z} \rightarrow S$
Zustand von Zelle i : $c(i)$ oder evtl. c_i
- ▶ Menge aller Konfigurationen: $C = S^{\mathbb{Z}}$

Lokale Arbeitsweise von \mathbb{Z} -CA

Idee:

- ▶ Jede Zelle ist ein endlicher Automat,
- ▶ der als Eingabe die Zustände von «Nachbar»-Zellen erhält.

Formal:

- ▶ *Nachbarschaft*: endliche Teilmenge $N \subset \mathbb{Z}$
Interpretation: relative Entfernungen der Nachbarzellen, d. h. Koordinatendifferenzen
- ▶ *lokale Überföhrungsfunktion* $\delta : S^N \rightarrow S$

Lokale Arbeitsweise von \mathbb{Z} -CA

Beispiel:

► $N = \{-1, 0, 1\}$

► δ :

	$\ell(-1)$	$\ell(0)$	$\ell(1)$	$\delta(\ell)$
	0	0	0	0
	0	0	1	1
	0	1	0	1
	0	1	1	1
	1	0	0	0
	1	0	1	1
	1	1	0	1
	1	1	1	0

Globale Arbeitsweise von \mathbb{Z} -CA

uniforme synchrone Arbeitsweise:

- ▶ alle Zellen machen
- ▶ zu allen Zeitpunkten
- ▶ nach der gleichen lokalen Überföhrungsfunktion
- ▶ einen Schritt

formal:

- ▶ von Zelle $i \in \mathbb{Z}$ in globaler Konfiguration c
lokal beobachtete Konfiguration: $c_{i+N} : N \rightarrow S : n \mapsto c_{i+n}$
- ▶ *ein globaler Schritt*: $\Delta : C \rightarrow C$,
 $\forall c \in C \forall i \in \mathbb{Z}$ gilt: $\Delta(c)(i) = \delta(c_{i+N})$

Beispiel: Regel 110

lokal

xyz	δ
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0

Beispiel: Regel 110

lokal

xyz	δ
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0

Beispiel: Regel 110

lokal

xyz	δ
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	0

Beispiel: Regel 110

lokal

xyz	δ
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	0

Beispiel: Regel 110

lokal

xyz	δ
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	0

Beispiel: Regel 110

lokal

xyz	δ
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0

Beispiel: Regel 110

lokal

xyz	δ
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0

Beispiel: Regel 110

lokal

xyz	δ
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0

Beispiel: Regel 110

lokal

xyz	δ
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0

Beispiel: Regel 110

lokal

xyz	δ
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0

Beispiel: Regel 110

lokal

xyz	δ
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0

Beispiel: Regel 110

lokal

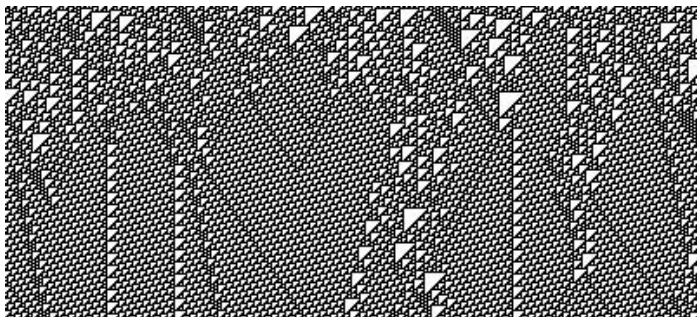
xyz	δ
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	1
111	0

Ausschnitt aus einem *Raum-Zeit-Diagramm*

$\Delta^0(c) :$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\Delta^1(c) :$	0	0	0	0	0	0	1	1	0
$\Delta^2(c) :$	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$\Delta^3(c) :$	0	0	0	0	1	1	0	1	0
$\Delta^4(c) :$	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$\Delta^5(c) :$	0	0	1	1	0	0	0	1	0
$\Delta^6(c) :$	0	1	1	1	0	0	1	1	0

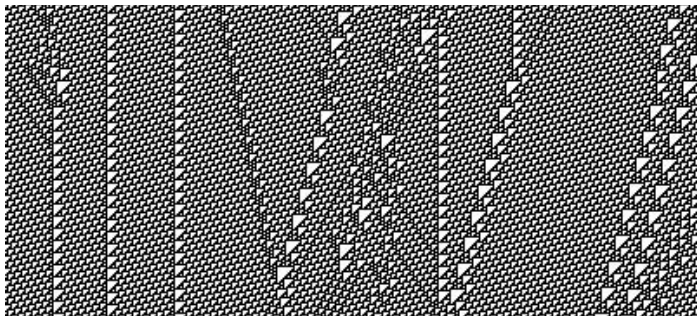
Beispiel: Regel 110

- ▶ ein größerer Ausschnitt aus einem RZD mit zufälliger Anfangskonfiguration:



Beispiel: Regel 110

- ▶ ein größerer Ausschnitt aus einem RZD mit zufälliger Anfangskonfiguration; Fortsetzung:



- ▶ Satz von Cook: Regel 110 ist sogar berechnungsuniversell.

Beispiel: einfache Signale

	>					
		>				
			>			
				>		
				<		
			<			
		<				

$\ell(-1)$	$\ell(0)$	$\ell(1)$	$\delta(\ell)$
⋮	⋮	⋮	⋮
□	>	□	□
>	□	□	>
>	□		>
□	>		<
□	<		□
□	<	□	□
□	□	<	<
⋮	⋮	⋮	⋮

Beispiel: einfache Signale (2)

	>					
		>				
			>			
				<		
			<			
		<				

$\ell(-1)$	$\ell(0)$	$\ell(1)$	$\delta(\ell)$
⋮	⋮	⋮	⋮
□	>	□	□
>	□	□	>
>	□		<
□	<		□
□	<	□	□
□	□	<	<
⋮	⋮	⋮	⋮

Beispiel: einfache Signale (3)

	1>				
	2>				
		1>			
		2>			
			1>		
			2>		
				1>	
				2>	

beliebige konstante rationale Geschwindigkeiten realisierbar

Überblick

Eindimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von L_{vv}

Beziehungen zwischen ZA und TM bzw. PTM

Höherdimensionale Zellularautomaten

Eingabe von Wörtern

- ▶ Eingabealphabet $A \subset S \setminus \{\square\}$
- ▶ Ruhezustand $\square \in S$
 - ▶ Forderung: $\delta(\square, \dots, \square) = \square$
- ▶ *Anfangskonfiguration* zu w :
 $\text{init} : A^+ \rightarrow C : w_1 \cdots w_n \mapsto c$ mit

$$c(i) = \begin{cases} w_i & \text{falls } 1 \leq i \leq n \\ \square & \text{sonst} \end{cases}$$

Halten und Akzeptieren

- ▶ Menge von Endzuständen $F \subset S$
- ▶ $\text{isFinal} : C \rightarrow \mathbb{B} : c \mapsto [c(1) \in F]$
- ▶ Menge akzeptierender Endzustände $F_+ \subset F$
- ▶ $\text{isAccepting} : C \rightarrow \mathbb{B} : c \mapsto [c(1) \in F_+]$

Von ZA erkannte Sprache

- ▶ $L(C) = \{w \in A^+ \mid \text{isAccepting}(\Delta^{\text{time}(w)}(\text{init}(w)))\}$
- ▶ Definition von $\text{time}(w)$, etc. kommt gleich

Beispiel eines ZA

- ▶ Erkenne $L_{121} = \{1^k 2 1^k \mid k \in \mathbb{N}_+\}$

Beispiel eines ZA

- ▶ Erkenne $L_{121} = \{1^k 2 1^k \mid k \in \mathbb{N}_+\}$
- ▶ z. B. drei Phasen wie bei PTM:
 - ▶ suche die erste 2
 - ▶ vergleiche Abstand vom linken und rechten Rand
prüfe ob ansonsten nur 1
 - ▶ Ergebnis ans linke Ende transportieren

Überblick

Eindimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von L_{vv}

Beziehungen zwischen ZA und TM bzw. PTM

Höherdimensionale Zellularautomaten

Zeitkomplexität von ZA

- ▶ Wie immer ...:

$$\text{time} : A^+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$w \mapsto \min\{t \in \mathbb{N}_+ \mid \text{isFinal}(\Delta^t(\text{init}(w)))\}$$

$$\text{Time} : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$n \mapsto \max\{\text{time}(w) \mid w \in A^n\}$$

Raumkomplexität von ZA

- ▶ analog zu TM:

$$\text{used-mem} : C \rightarrow 2^{\mathbb{Z}}$$

$$c \mapsto \{i \in \mathbb{Z} \mid c(i) \neq \square\}$$

$$\text{space} : A^+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$w \mapsto \left| \bigcup_{t \leq \text{time}(w)} \text{used-mem}(\Delta^t(\text{init}(w))) \right|$$

$$\text{Space} : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$n \mapsto \max\{\text{space}(w) \mid w \in A^n\}$$

Zustandsänderungskomplexität von ZA

- ▶ Betrachte die Anzahl *echter* Zustandsänderungen im Laufe einer Berechnung.
- ▶ Motivation: In CMOS-Technologie kosten vor allem die Bitänderungen Energie.



Roland Vollmar

Some Remarks about the “Efficiency” of Polyautomata.

International Journal of Theoretical Physics, 21(12):1007–1015, 1982.

Zustandsänderungskomplexität von ZA (2)

► definiere:

$$\text{chn}' : C \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$c \mapsto |\{i \in \mathbb{Z} \mid \delta(c_{i+N}) \neq c_i\}|$$

$$\text{chn} : A^+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$w \mapsto \sum_{t=0}^{\text{time}(w)-1} \text{chn}'(\Delta^t(\text{init}(w)))$$

$$\text{Chng} : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$n \mapsto \max\{\text{chn}(w) \mid w \in A^n\}$$

Zustandsänderungskomplexität von ZA (3)

- ▶ Komplexitätsklassen:

$$\mathbb{Z}\text{-CA-CHNG}(p(n))\text{-}\dots$$

- ▶ Beachte: Es ist stets $\text{Chng}(n) \in \Omega(\text{Time}(n))$

Überblick

Eindimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von L_{vv}

Beziehungen zwischen ZA und TM bzw. PTM

Höherdimensionale Zellularautomaten

L_{vv} : Verschiedene Erkennungsmöglichkeiten

L_{UV} : Verschiedene Erkennungsmöglichkeiten

- ▶ benutze ein Signal, um eine TM zu simulieren
- ▶ benutze mehr oder weniger viele Signale, um eine PTM zu simulieren
- ▶ «direkte» Verfahren

Ergebnisse

Simulation einer \mathbb{W}_1 -TM ergibt

$$L_{vv} \in \mathbb{Z}\text{-CA-SPC}(\Theta(n))\text{-TIME}(\Theta(n^2))\text{-CHNG}(\Theta(n^2))$$

Ergebnisse

Simulation einer \mathbb{W}_1 -TM ergibt

$$L_{vv} \in \mathbb{Z}\text{-CA-SPC}(\Theta(n))\text{-TIME}(\Theta(n^2))\text{-CHNG}(\Theta(n^2))$$

Simulation der schnellen \mathbb{W}_1 -PTM und schnelle direkte Methoden ergeben:

Satz

$$L_{vv} \in \mathbb{Z}\text{-CA-SPC}(\Theta(n))\text{-TIME}(\Theta(n))\text{-CHNG}(\Theta(n^2))$$

Kann man da noch effizienter werden?

Eine untere Schranke für L_{VV}

- ▶ Eine «*knapp-über-log*»-Funktion sei eine nicht-fallende Funktion $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{f(n)} = 0 .$$

Satz

Für jeden eindimensionalen ZA, der L_{VV} erkennt, und jede knapp-über-log-Funktion f gilt:

$$\text{Chng}(n) \in \Omega(n^2 / f(n))$$

Beachte: Der interessante Fall sind *langsam* wachsende $f(n)$.

Eine untere Schranke für L_{vv} : Beweis (1)

- ▶ grundlegende Idee: Überquerungsfolgen ähnlich wie bei Turingmaschinen



P. Sanders, R. Vollmar, T. Worsch

Cellular Automata: Energy Consumption and Physical Feasibility.
Fundamenta Informaticae 52, S. 233-248, 2002.

Eine untere Schranke für L_{vv} : Beweis (2)

- ▶ $\langle w \rangle$ bezeichne das Raum-Zeit-Diagramm für Eingabe w ,
i. e. $\langle w \rangle : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow Q$ mit $\langle w \rangle(i, \tau) = \Delta^\tau(\text{init } w)(i)$
- ▶ Einschränkung auf Teilmenge M von Zellen: $\langle w|M \rangle : M \times \mathbb{N} \rightarrow Q$
- ▶ Sei $\mathbb{Z} = M_1 \dot{\cup} M_2$ eine Partitionierung der Zellmenge und K die
«Grenze» zwischen M_1 and M_2 :

$$K = \{i \in M_1 \mid \exists n \in \mathbb{N} : i + n \in M_2\} \\ \cup \{i \in M_2 \mid \exists n \in \mathbb{N} : i + n \in M_1\}$$

- ▶ Die $\langle w|K \rangle$ übernehmen die Rolle der Überquerungsfolgen.

Eine untere Schranke für L_{vv} : Beweis (3)

- ▶ Skizze: an der Tafel
- ▶ Details für allgemeinere Aufgabenstellung: in Kapitel 10

Überblick

Eindimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von L_{vv}

Beziehungen zwischen ZA und TM bzw. PTM

Höherdimensionale Zellularautomaten

Zusammenhang von ZA mit \mathbb{W}_1 -TM

Satz

Für $s(n) \geq n$ und $t(n) \geq n$ gilt:

$$\mathbb{W}_1\text{-TM-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t)) \subseteq \mathbb{Z}\text{-CA-SPC}(\quad)\text{-TIME}(\quad)\text{-CHNG}(\quad)$$

Zusammenhang von ZA mit \mathbb{W}_1 -TM

Satz

Für $s(n) \geq n$ und $t(n) \geq n$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_1\text{-TM-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t)) \\ \subseteq \mathbb{Z}\text{-CA-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t))\text{-CHNG}(\Theta(t)) \end{aligned}$$

Beachte: $\text{Chng} \in \Theta(\text{Time})$ ist optimal.

Zusammenhang von ZA mit \mathbb{W}_1 -TM: Beweis

- ▶ Idee: an der Tafel

Zusammenhang von ZA mit \mathbb{W}_1 -TM: Beweis

- ▶ Idee: an der Tafel
- ▶ $Q_C = (Q_T \dot{\cup} \{-\}) \times B_T$
- ▶ repräsentiere TM-Konfiguration $c_T = (s, b, p)$ durch ZA-Konfiguration

$$c_C : \mathbb{Z} \rightarrow Q_C$$
$$i \mapsto \begin{cases} (s, b(p)) & \text{falls } i = p \\ (-, b(i)) & \text{falls } i \neq p \end{cases}$$

Zusammenhang von ZA mit \mathbb{W}_1 -TM: Beweis (2)

lokale Überföhrungsfunktion:

$$\delta_C((- , a), (- , b), (- , c)) = (- , b)$$

$$\delta_C((s , a), (- , b), (- , c)) = \begin{cases} (s' , b) & \text{falls } \delta_T(s , a) = (s' , a' , 1) \\ (- , b) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta_C((- , a), (s , b), (- , c)) = \begin{cases} (s' , b') & \text{falls } \delta_T(s , b) = (s' , b' , 0) \\ (- , b') & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta_C((- , a), (- , b), (s , c)) = \begin{cases} (s' , b) & \text{falls } \delta_T(s , c) = (s' , c' , -1) \\ (- , b) & \text{sonst} \end{cases}$$

Andere Kombinationen von Argumenten können nicht auftreten:
Festlegung der Funktionswerte willkürlich

Zusammenhang von ZA mit $*W_1$ -TM

Satz

Für $s \geq id$ und $t \geq id$ gilt:

$$\begin{aligned}
 *W_1\text{-TM-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t)) \\
 \subseteq \mathbb{Z}\text{-CA-SPC}(\quad)\text{-TIME}(\quad)\text{-CHNG}(\quad)
 \end{aligned}$$

Zusammenhang von ZA mit $*W_1$ -TM

Satz

Für $s \geq id$ und $t \geq id$ gilt:

$$\begin{aligned} *W_1\text{-TM-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t)) \\ \subseteq \mathbb{Z}\text{-CA-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t))\text{-CHNG}(\Theta(s \cdot t)) \end{aligned}$$

Beachte: L_{vv} zeigt, dass im Fall $s(n) = t(n) = n$ ein kleineres $\text{Chng}(\cdot)$ «im allgemeinen» «kaum» möglich ist.

Zusammenhang von ZA mit $*W_1$ -TM: Beweis

- ▶ Vorbereitung der Idee:

Alternatives Verschieben

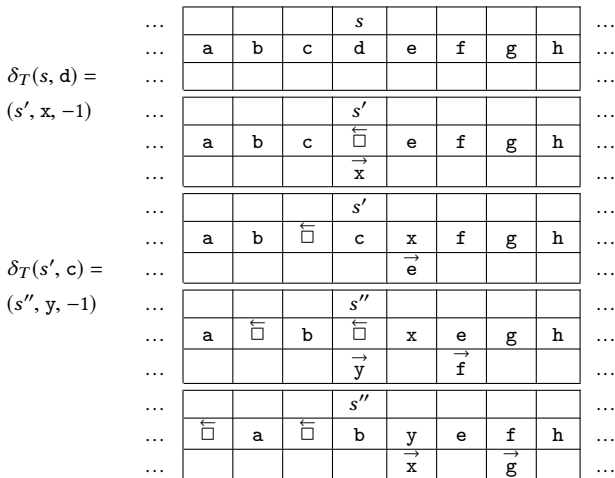
- ▶ verschiebe das «Band» statt des Zustandes
- ▶ dafür zweierlei Sorten von Signalen:
 - ▶ in Verschiebungsrichtung:
Signal mit «überschüssigem Symbol»
 - ▶ entgegen Verschiebungsrichtung:
Signal mit «Lücke»

Band- statt Kopfverschiebung (ein Band) (1)

$$\delta_T(s, d) = (s', x, -1)$$

...				s					...
...	a	b	c	d	e	f	g	h	...
...									...
...				s'					...
...	a	b	c	$\overleftarrow{\square}$	e	f	g	h	...
...				\overrightarrow{x}					...
...				s'					...
...	a	b	$\overleftarrow{\square}$	c	x	f	g	h	...
...					\overrightarrow{e}				...
...				s'					...
...	a	$\overleftarrow{\square}$	b	c	x	e	g	h	...
...						\overrightarrow{f}			...
...				s'					...
...	$\overleftarrow{\square}$	a	b	c	x	e	f	h	...
...							\overrightarrow{g}		...

Band- statt Kopfverschiebung (ein Band) (2)



Zusammenhang von ZA mit $*W_*$ -TM

Konstruktion von Stoß:

Satz

Für alle $t(n) \geq n$ gilt:

$$*W_*\text{-TM-TIME}(t) \subseteq *W_1\text{-TM-TIME}(\Theta(t))$$

Also gilt auch:

Korollar

$$\begin{aligned} &*W_*\text{-TM-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t)) \\ &\subseteq \mathbb{Z}\text{-CA-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t))\text{-CHNG}(\Theta(st)) \end{aligned}$$

Überblick

Eindimensionale Zellularautomaten

Höherdimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von L_{pal} und L_{vv}

Beziehungen zwischen verschiedenen Modellen

Überblick

Eindimensionale Zellularautomaten

Höherdimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von L_{pal} und L_{vv}

Beziehungen zwischen verschiedenen Modellen

Definition

- ▶ *Raum*: $R = \mathbb{Z}^d$
- ▶ *Zustandsmenge*: S
- ▶ *Konfiguration*: $c : R \rightarrow S$
Zustand von Zelle i : $c(i)$ oder evtl. c_i
- ▶ Menge aller Konfigurationen: $C = S^R$
- ▶ endliche *Nachbarschaft*: $N \subset R$
(relative Entfernungen, d. h. Koordinatendifferenzen)
- ▶ *lokale Überföhrungsfunktion* $\delta : S^N \rightarrow S$
- ▶ von Zelle $i \in R$ in globaler Konfiguration c *beobachtete lokale Konfiguration*: $c_{i+N} : N \rightarrow S : n \mapsto c_{i+n}$
- ▶ *ein globaler Schritt*: $\Delta : C \rightarrow C$,
 $\forall c \in C \forall i \in R$ gilt: $\Delta(c)(i) = \delta(c_{i+N})$

Standardnachbarschaften

- ▶ *von Neumann-Nachbarschaft* mit Radius r :

$$H_r^{(d)} = \left\{ (x_1, \dots, x_d) \mid \sum_{1 \leq i \leq d} |x_i| \leq r \right\}$$

- ▶ *Moore-Nachbarschaft* mit Radius r :

$$M_r^{(d)} = \left\{ (x_1, \dots, x_d) \mid \max_{1 \leq i \leq d} |x_i| \leq r \right\}$$

- ▶ Für $d = 1$ stimmen beide überein.

Überblick

Eindimensionale Zellularautomaten

Höherdimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von L_{pal} und L_{vv}

Beziehungen zwischen verschiedenen Modellen

Möglichkeiten der Eingabe

Wie gibt man eindimensionale Wörter in einen d -dimensionalen ZA ein?

Möglichkeiten der Eingabe

Wie gibt man eindimensionale Wörter in einen d -dimensionalen ZA ein?

- ▶ eindimensional
- ▶ 2-dimensional: ca. \sqrt{n} Bruchstücke der Länge $\lceil \sqrt{n} \rceil$
 - ▶ in «row major» Anordnung
 - ▶ in Schlangenlinienform
 - ▶ ...
- ▶ 2-dimensional: z. B. als Spirale, ...
- ▶ 3-, ..., d -dimensional:
diverse Möglichkeiten analog 2-dim. Fall
- ▶ sequenziell «von außen»

Halten und Akzeptieren

analog zu \mathbb{Z} -CA:

- ▶ Menge von Endzuständen $F \subset S$
- ▶ $\text{isFinal} : C \rightarrow \mathbb{B} : c \mapsto [c(e) \in F]$
 - ▶ Dabei sei e die Zelle mit dem ersten Eingabesymbol.
- ▶ Menge akzeptierender Endzustände $F_+ \subset F$
- ▶ $\text{isAccepting} : C \rightarrow \mathbb{B} : c \mapsto [c(e) \in F_+]$

Beispiel: Erkennung regulärer Sprachen

in \mathbb{Z}^2 -CA:

- ▶ mit sequenzieller Eingabe «von außen»: klar
- ▶ mit eindimensionaler Eingabe: klar
- ▶ mit «quadratischer» Eingabe in «row major» Form:

Beispiel: Erkennung regulärer Sprachen

in \mathbb{Z}^2 -CA:

- ▶ mit sequenzieller Eingabe «von außen»: klar
- ▶ mit eindimensionaler Eingabe: klar
- ▶ mit «quadratischer» Eingabe in «row major» Form:
 - ▶ bearbeite alle Teilstücke der Länge $\lceil \sqrt{n} \rceil$ gleichzeitig,
 - ▶ sammle in einer Spalte alle «Teilergebnisse» ein und
 - ▶ errechne daraus das Gesamtergebnis
 - ▶ Details an der Tafel

Überblick

Eindimensionale Zellularautomaten

Höherdimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von L_{pal} und L_{vv}

Beziehungen zwischen verschiedenen Modellen

Zeitkomplexität von \mathbb{Z}^d -CA

wie bei \mathbb{Z} -CA etc.

Raumkomplexität von \mathbb{Z}^d -CA

Was will man messen? (und warum?)

Raumkomplexität von \mathbb{Z}^d -CA

Was will man messen? (und warum?)

- ▶ die Anzahl benutzter Zellen
 - ▶ Speicherkomplexität $\text{Space}(n)$
- ▶ die Seitenlänge des kleinsten Würfels (oder Quaders?), der alle benutzten Zellen umschließt?
 - ▶ «Ausdehnungskomplexität» $\text{Ext}(n)$

(weiterer Hinweis auf die Unterschiedlichkeit von 1- und 2-dim.. ZA ...)

Erkennungskomplexität regulärer Sprachen

- ▶ sequenzielle Eingabe «von außen»:
 $\text{Space}(n) = \text{Ext}(n) = 1$ und $\text{Time}(n) = n$
- ▶ eindimensionale Eingabe:
 $\text{Space}(n) = \text{Ext}(n) = n$ und $\text{Time}(n) = n$
- ▶ zweidimensionale Eingabe:

Erkennungskomplexität regulärer Sprachen

- ▶ sequenzielle Eingabe «von außen»:
 $\text{Space}(n) = \text{Ext}(n) = 1$ und $\text{Time}(n) = n$
- ▶ eindimensionale Eingabe:
 $\text{Space}(n) = \text{Ext}(n) = n$ und $\text{Time}(n) = n$
- ▶ zweidimensionale Eingabe:
 $\text{Space}(n) = n$, $\text{Ext}(n) = \sqrt{n}$ und $\text{Time}(n) = \sqrt{n}$
- ▶ d -dimensionale Eingabe:
 $\text{Space}(n) = n$, $\text{Ext}(n) = n^{1/d}$ und $\text{Time}(n) = n^{1/d}$

Überblick

Eindimensionale Zellularautomaten

Höherdimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von L_{pal} und L_{vv}

Beziehungen zwischen verschiedenen Modellen

► Erkennung von L_{pal}

- ▶ Erkennung von L_{pal}
 - ▶ eindimensionale Eingabe:
 - ▶ in Zeit n
 - ▶ zweidimensionale Eingabe:
 - ▶ in Zeit $\Theta(\sqrt{n})$

- ▶ Erkennung von L_{pal}
 - ▶ eindimensionale Eingabe:
 - ▶ in Zeit n
 - ▶ zweidimensionale Eingabe:
 - ▶ in Zeit $\Theta(\sqrt{n})$
 - ▶ Drehung des Musters um 180° und Vergleich mit dem Original (Details an der Tafel)

- ▶ Erkennung von L_{pal}
 - ▶ eindimensionale Eingabe:
 - ▶ in Zeit n
 - ▶ zweidimensionale Eingabe:
 - ▶ in Zeit $\Theta(\sqrt{n})$
 - ▶ Drehung des Musters um 180° und Vergleich mit dem Original (Details an der Tafel)
- ▶ Erkennung von L_{vv} :
 - ▶ Übung
 - ▶ analoge Geschwindigkeiten erreichbar

Rotation um 90°

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>V</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>G</i>
<i>U</i>	<i>n</i>	1	2	<i>e</i>	<i>H</i>
<i>T</i>	<i>m</i>	4	3	<i>f</i>	<i>I</i>
<i>S</i>	<i>k</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>g</i>	<i>K</i>
<i>R</i>	<i>Q</i>	<i>P</i>	<i>N</i>	<i>M</i>	<i>L</i>

Rotation um 90°

$$\downarrow \overleftarrow{A} \quad \overleftarrow{B} \quad \overleftarrow{C} \quad \overleftarrow{D} \quad \overleftarrow{E} \quad \overleftarrow{F} \uparrow$$

$$\downarrow V \quad a \quad b \quad c \quad d \quad G \uparrow$$

$$\downarrow U \quad n \quad 1 \quad 2 \quad e \quad H \uparrow$$

$$\downarrow T \quad m \quad 4 \quad 3 \quad f \quad I \uparrow$$

$$\downarrow S \quad k \quad i \quad h \quad g \quad K \uparrow$$

$$\downarrow \overrightarrow{R} \quad \overrightarrow{Q} \quad \overrightarrow{P} \quad \overrightarrow{N} \quad \overrightarrow{M} \quad \overrightarrow{L} \uparrow$$

Rotation um 90°

$$\downarrow \overleftarrow{B} \quad \overleftarrow{C} \quad \overleftarrow{D} \quad \overleftarrow{E} \quad \overleftarrow{F} \quad \overleftarrow{G} \uparrow$$

$$\downarrow A \quad \downarrow \overleftarrow{a} \quad \overleftarrow{b} \quad \overleftarrow{c} \quad \overleftarrow{d} \uparrow \quad H \uparrow$$

$$\downarrow V \quad \downarrow n \quad 1 \quad 2 \quad e \uparrow \quad I \uparrow$$

$$\downarrow U \quad \downarrow m \quad 4 \quad 3 \quad f \uparrow \quad K \uparrow$$

$$\downarrow T \quad \downarrow \overrightarrow{k} \quad \overrightarrow{i} \quad \overrightarrow{h} \quad \overrightarrow{g} \uparrow \quad L \uparrow$$

$$\downarrow \overrightarrow{S} \quad \overrightarrow{R} \quad \overrightarrow{Q} \quad \overrightarrow{P} \quad \overrightarrow{N} \quad \overrightarrow{M} \uparrow$$

Rotation um 90°

$$\downarrow \overleftarrow{C} \quad \overleftarrow{D} \quad \overleftarrow{E} \quad \overleftarrow{F} \quad \overleftarrow{G} \quad \overleftarrow{H} \uparrow$$

$$\downarrow B \quad \downarrow \overleftarrow{b} \quad \overleftarrow{c} \quad \overleftarrow{d} \quad \overleftarrow{e} \uparrow \quad I \uparrow$$

$$\downarrow A \quad \downarrow a \quad \downarrow \overleftarrow{1} \quad \overleftarrow{2} \uparrow \quad f \uparrow \quad K \uparrow$$

$$\downarrow V \quad \downarrow n \quad \downarrow \overrightarrow{4} \quad \overrightarrow{3} \uparrow \quad g \uparrow \quad L \uparrow$$

$$\downarrow U \quad \downarrow \overrightarrow{m} \quad \overrightarrow{k} \quad \overrightarrow{i} \quad \overrightarrow{h} \uparrow \quad M \uparrow$$

$$\downarrow \overrightarrow{T} \quad \overrightarrow{S} \quad \overrightarrow{R} \quad \overrightarrow{Q} \quad \overrightarrow{P} \quad \overrightarrow{N} \uparrow$$

Rotation um 90°

$$\downarrow \overleftarrow{D} \quad \overleftarrow{E} \quad \overleftarrow{F} \quad \overleftarrow{G} \quad \overleftarrow{H} \quad \overleftarrow{I} \uparrow$$

$$\downarrow C \quad \downarrow \overleftarrow{c} \quad \overleftarrow{d} \quad \overleftarrow{e} \quad \overleftarrow{f} \uparrow \quad K \uparrow$$

$$\downarrow B \quad \downarrow b \quad 2 \quad 3 \quad g \uparrow \quad L \uparrow$$

$$\downarrow A \quad \downarrow a \quad 1 \quad 4 \quad h \uparrow \quad M \uparrow$$

$$\downarrow V \quad \downarrow \overrightarrow{n} \quad \overrightarrow{m} \quad \overrightarrow{k} \quad \overrightarrow{i} \uparrow \quad N \uparrow$$

$$\downarrow \overrightarrow{U} \quad \overrightarrow{T} \quad \overrightarrow{S} \quad \overrightarrow{R} \quad \overrightarrow{Q} \quad \overrightarrow{P} \uparrow$$

Rotation um 90°

$\downarrow \overleftarrow{E}$	\overleftarrow{F}	\overleftarrow{G}	\overleftarrow{H}	\overleftarrow{I}	$\overleftarrow{K} \uparrow$
$\downarrow D$	d	e	f	g	$L \uparrow$
$\downarrow C$	c	2	3	h	$M \uparrow$
$\downarrow B$	b	1	4	i	$N \uparrow$
$\downarrow A$	a	n	m	k	$P \uparrow$
$\downarrow \overrightarrow{V}$	\overrightarrow{U}	\overrightarrow{T}	\overrightarrow{S}	\overrightarrow{R}	$\overrightarrow{Q} \uparrow$

Rotation um 90°

<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>K</i>	<i>L</i>
<i>E</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>M</i>
<i>D</i>	<i>c</i>	2	3	<i>h</i>	<i>N</i>
<i>C</i>	<i>b</i>	1	4	<i>i</i>	<i>P</i>
<i>B</i>	<i>a</i>	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>k</i>	<i>Q</i>
<i>A</i>	<i>V</i>	<i>U</i>	<i>T</i>	<i>S</i>	<i>R</i>

Überblick

Eindimensionale Zellularautomaten

Höherdimensionale Zellularautomaten

Grundlagen

Erkennung formaler Sprachen

Komplexitätsmaße

Erkennung von L_{pal} und L_{vv}

Beziehungen zwischen verschiedenen Modellen

Von TM zu d -dimensionalen ZA

Satz

Wenn $s(n)$ effizient konstruierbar ist und die «Eingabemodalitäten» passen, gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_1\text{-TM-SPC}(s)\text{-TIME}(t) \\ \subseteq \mathbb{Z}^d\text{-CA-EXT}(\Theta(s^{1/d}))\text{-TIME}(\Theta(t)) \\ \subseteq \mathbb{Z}^d\text{-CA-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t)) \end{aligned}$$

Offen: Hilft zusätzliches Wissen über die Arbeitsweise der TM beim Zeitbedarf des ZA? (*studentische Arbeit?*)

Beweisidee

an der Tafel:

Beweisidee

an der Tafel:


- ▶ würfelfüllende Kurve, z. B. Schlangenlinie

Beweisidee

an der Tafel:

- ▶ würfelfüllende Kurve, z. B. Schlangenlinie
- ▶ Überlegung:
 - ▶ Das funktioniert sogar für die Simulation von \mathbb{Z}^1 -CA,
 - ▶ z. B. falls die Eingabeform passt,
 - ▶ oder falls genug Zeit zur Umformung der Eingabe zur Verfügung steht ...

Dimensionserhöhung bei ZA

- ▶ wenn man die zusätzlichen Dimensionen *nicht* benutzt:
 - ▶ einfach
 - ▶ Volumen der kleinsten umschließenden Würfel wächst
- ▶ wenn man die zusätzlichen Dimensionen benutzt:
 - ▶ bei Übergang von 2 nach 3 Dimensionen bekannt:
Ausdehnung kann *ohne Zeitverlust* von $e(n)$ auf $e^{2/3}(n)$ geschrumpft werden (gleiches Volumen)
 -  [A. Achilles, M. Kutrib, T. Worsch](#)
On Relations between Arrays of Processing Elements of Different Dimensionality.
[Proceedings Parcella 1996, 13–20.](#)
 - ▶ relativ aufwändig
 - ▶ offen: Verallgemeinerung z. B. auf höhere Dimensionen
(*studentische Arbeit?*)

Von ZA zu TM

Satz

Wenn $e(n)$ effizient konstruierbar ist, gilt:

$$\mathbb{Z}^d\text{-CA-EXT}(e)\text{-TIME}(t) \subseteq \mathbb{W}_1\text{-TM-SPC}(\Theta(e^d))\text{-TIME}(\text{Pol}(t))$$

Bemerkungen

- ▶ Beweisidee sollte klar sein, oder?
- ▶ meines Wissens offen: Gilt auch

$$\mathbb{Z}^d\text{-CA-SPC}(s)\text{-TIME}(t) \subseteq \mathbb{W}_1\text{-TM-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\text{Pol}(t))$$

unter halbwegs allgemeinen, plausiblen Annahmen? (*stud. Arbeit?*)

- ▶ offen: Helfen zusätzliche TM-Köpfe? (*stud. Arbeit?*)
- ▶ Ähnliches beim Übergang von hoch- zu niedrig-dim. ZA:



C. Scheben

Simulation of d' -Dimensional Cellular Automata on
 d -Dimensional Cellular Automata

Proceedings ACRI 2006, 131-140.

Zusammenfassung

- ▶ ZA können in jedem Schritt eine «große» Informationsmenge über eine «kleine» Entfernung transportieren. Das ist mindestens ebenso mächtig wie der Transport einer «kleinen» Informationsmenge über eine «große» Entfernung bei TM.
- ▶ In höherdimensionalen ZA ist es wichtig, auf die genauen Formalisierungen z. B. von Eingabe und Komplexitätsmaßen zu schauen.
- ▶ TM, PTM und ZA können sich alle(?) auf linearem Platz in polynomieller Zeit gegenseitig simulieren.

Zusammenfassung der ersten drei Kapitel

Für

- ▶ beliebige Modelle \mathcal{M} und \mathcal{M}' aus den Kapiteln über
 - ▶ Turingmaschinen
 - ▶ parallele Turingmaschinen
 - ▶ Zellularautomaten
- ▶ und (nahezu) beliebige Schranken s und t gilt:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}\text{-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\text{Pol}(t)) \\ = & \mathcal{M}'\text{-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\text{Pol}(t)) \end{aligned}$$