

Modelle der Parallelverarbeitung

1. Turingmaschinen

Thomas Worsch

Institut für Theoretische Informatik
Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2020

Überblick

Turingmaschinen mit einem Arbeitsband

Der rote Faden durch die Vorlesung

Weiteres zu Turingmaschinen mit einem Arbeitsband

Turingmaschinen mit mehreren Arbeitsbändern/Köpfen

Turingmaschinen mit speziellen Bändern

Überblick

Turingmaschinen mit einem Arbeitsband

Der rote Faden durch die Vorlesung

Weiteres zu Turingmaschinen mit einem Arbeitsband

Turingmaschinen mit mehreren Arbeitsbändern/Köpfen

Turingmaschinen mit speziellen Bändern

Turingmaschinen, einfachster Fall

Eine *Turingmaschine* besteht im einfachsten Fall aus

- ▶ einem Arbeitsband
- ▶ ein Schreib-Lese-Kopf auf dem Band, verbunden mit
- ▶ einer Steuereinheit



Alan Turing

On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem.

Proceedings of the London Mathematical Society **42**,
S. 230–265, 1936.

Definition von \mathbb{W}_1 -TM

Bestandteile $T = (S, \dots, B, \dots, \delta, \dots)$

- ▶ *Zustandsmenge* S
- ▶ *Bandalphabet* B
- ▶ *Überföhrungsfunktion* $\delta : S \times B \rightarrow S \times B \times D$
mit $D = \{-1, 0, 1\}$

Definition von \mathbb{W}_1 -TM

Bestandteile $T = (S, \dots, B, \dots, \delta, \dots)$

- ▶ *Zustandsmenge* S
- ▶ *Bandalphabet* B
- ▶ *Überföhrungsfunktion* $\delta : S \times B \rightarrow S \times B \times D$
mit $D = \{-1, 0, 1\}$
- ▶ bzw. $\delta = (\delta_s, \delta_b, \delta_d)$ mit
 - ▶ $\delta_s : S \times B \rightarrow S$
 - ▶ $\delta_b : S \times B \rightarrow B$
 - ▶ $\delta_d : S \times B \rightarrow D$

Notation \mathbb{W}_1 :

- ▶ *ein* \mathbb{W} : *ein* Arbeitsband (working tape)
- ▶ Index 1: *ein* Kopf auf dem Band

Arbeitsweise von \mathbb{W}_1 -TM

- ▶ **Konfiguration** („globaler Gesamtzustand“):

$c = (s, b, p)$ mit

- ▶ Zustand $s \in S$
- ▶ Bandbeschriftung $b : \mathbb{Z} \rightarrow B$, i. e. $b \in B^{\mathbb{Z}}$
- ▶ Kopfposition $p \in \mathbb{Z}$

schreibe C_T oder C für die Menge aller Konfigurationen

- ▶ **ein globaler Schritt** $\Delta : C \rightarrow C$, wobei

$\Delta(s, b, p) = (s', b', p')$ mit

- ▶ $s' = \delta_s(s, b(p))$
- ▶ $b'(i) = \begin{cases} \delta_b(s, b(p)) & \text{falls } i = p \\ b(i) & \text{falls } i \neq p \end{cases}$
- ▶ $p' = p + \delta_d(s, b(p))$

Beispiel

- ▶ $S = \{A, B, C, D, E, F, Z\}$
- ▶ $B = \{1, \square\}$
- ▶ L statt -1 , R statt $+1$
- ▶ δ gegeben durch die folgende Tabelle:

	A	B	C	D	E	F	Z
\square	$B1R$	$C\square R$	$D1L$	$E\square L$	$A\square R$	$A1L$	
1	$F\square L$	$D\square R$	$E1R$	$D\square L$	$C1R$	$Z1R$	

Beispiel

□	□	□	A	□	□	□	□
□	□	□	1	B	□	□	□
□	□	□	1	□	C	□	□
□	□	□	1	D	□	1	□
□	□	□	E	□	1	□	□
□	□	□	1	C	□	1	□
□	□	□	D	□	1	1	□
□	□	D	□	□	1	1	□

Beispiel

□	□	□	A	□	□	□	□
□	□	□	1	B	□	□	□
□	□	□	1	□	C	□	□
□	□	□	1	D	1	□	□
□	□	□	1	E	1	□	□
□	□	□	1	C	1	□	□
□	□	□	1	D	1	1	□
□	□	D	□	1	1	□	□

fleißiger Bieher (<http://www.drb.insel.de/~heiner/BB/>):
 mehr als $1.2 \cdot 10^{865}$ Einsen, mehr als $3.0 \cdot 10^{1730}$ Schritte

Ein noch fleißigerer Biber

Pavel Kropitz (2010)

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>Z</i>
\square	<i>B1R</i>	<i>C1R</i>	<i>D1L</i>	<i>E1R</i>	<i>A1L</i>	<i>Z1L</i>	
1	<i>E1L</i>	<i>F1R</i>	<i>B0R</i>	<i>C□L</i>	<i>D□R</i>	<i>C1R</i>	

- ▶ mehr als $3.514 \cdot 10^{18276}$ Einsen nach
- ▶ mehr als $7.412 \cdot 10^{36534}$ Schritten

<http://www.drb.insel.de/~heiner/BB/bb-xlist.txt>

Überblick

Turingmaschinen mit einem Arbeitsband

Der rote Faden durch die Vorlesung

Weiteres zu Turingmaschinen mit einem Arbeitsband

Turingmaschinen mit mehreren Arbeitsbändern/Köpfen

Turingmaschinen mit speziellen Bändern

In dieser Vorlesung

- ▶ betrachten wir *Modelle der Parallelverarbeitung*
- ▶ und zwar vom „Standard“-Standpunkt
 - ▶ endliche Eingabe
 - ▶ endliche Berechnung
 - ▶ endliche Ausgabe
- ▶ These von Church/Turing: Alle „vernünftigen“ Modelle können die gleichen Funktionen berechnen.
- ▶ Das kann man für die parallelen Modelle auch beweisen.
- ▶ Wozu also Betrachtung paralleler Modelle?
- ▶ (und wozu Turingmaschinen?)

Effizienz

- ▶ Unterschiede zwischen verschiedenen Modellen erhofft/erwartet
- ▶ Zusammenhänge zwischen verschiedenen Modellen erhofft/erwartet
- ▶ wie messen?

Komplexitätsmaße, genauer gesagt

Maße für Berechnungskomplexität:

- ▶ Zeitkomplexität: Anzahl benötigter Schritte
- ▶ Platzkomplexität/Raumkomplexität: ...
- ▶ andere ... ? ...

Varianten

gegeben: ein paralleles Modell

- ▶ ! Es gibt «schöne» Algorithmen.
? Wie «realistisch» ist das Modell?
- ▶ ! Das Modell ist «realistisch».
? Wie «schöne» Algorithmen gibt es?

tendenziell

- ▶ zu Beginn der Vorlesung: eher Standpunkt 1
- ▶ gegen Ende der Vorlesung: eher Standpunkt 2

Überblick

Turingmaschinen mit einem Arbeitsband

Der rote Faden durch die Vorlesung

Weiteres zu Turingmaschinen mit einem Arbeitsband

Turingmaschinen mit mehreren Arbeitsbändern/Köpfen

Turingmaschinen mit speziellen Bändern

In dieser Vorlesung

überwiegend *Entscheidungsprobleme*, also
Erkennung formaler Sprachen:

- ▶ endliche *Eingabe: ein Wort* $w \in A^+$
- ▶ endliche Berechnung
- ▶ endliche *Ausgabe: ein Bit* (akzeptiert/abgelehnt)

Eingabe formaler Sprachen bei TM

- ▶ Anfangszustand $s_0 \in S$
- ▶ Eingabealphabet $A \subset B \setminus \{\square\}$
- ▶ Blanksymbol \square
- ▶ *Anfangskonfiguration* zu w :
init : $A^+ \rightarrow C : w_1 \cdots w_n \mapsto (s_0, b_w, 1)$ mit

$$b_w(i) = \begin{cases} w_i & \text{falls } 1 \leq i \leq n \\ \square & \text{sonst} \end{cases}$$

Halten bei TM und Erkennung formaler Sprachen

- ▶ Menge von *Endzuständen* $F \subset S$
- ▶ $\text{isFinal} : C \rightarrow \mathbb{B} : (s, b, p) \mapsto [s \in F]$
 - ▶ Forderung $\forall s \in F \forall a \in B : \delta(s, a) = (s, a, 0)$
stellt sicher, dass Endkonfigurationen erhalten bleiben.
- ▶ Menge *akzeptierender* Endzustände $F_+ \subset F$
- ▶ $\text{isAccepting} : C \rightarrow \mathbb{B} : (s, b, p) \mapsto [s \in F_+]$
 - ▶ $\text{isAccepting}(c) \implies \text{isFinal}(c)$

Definition: Zeitkomplexität von TM

- ▶ In dieser Vorlesung:
O. B. d. A. hält jede Maschine für jede Eingabe.
 - ▶ akzeptable Annahme für z. B. «harmlose» Zeitschranken
- ▶ Dann sind die folgenden Funktionen total:

$$\text{time} : A^+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$w \mapsto \min\{t \in \mathbb{N}_+ \mid \text{isFinal}(\Delta^t(\text{init}(w)))\}$$

$$\text{Time} : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$n \mapsto \max\{\text{time}(w) \mid w \in A^n\}$$

- ▶ Definition passt für alle Modelle mit definierten init , Δ und isFinal
zum Beispiel $*\mathbb{W}_*$ -TM [siehe dort](#)

Von TM erkannte Sprache

- ▶ $L(T) = \{w \in A^+ \mid \text{isAccepting}(\Delta^{\text{time}(w)}(\text{init}(w)))\}$
- ▶ Definition passt für alle Modelle mit ...

Raumkomplexität für TM: 1. Versuch

- ▶ eine Funktion (welche?)

$$\text{mem} : C \rightarrow \mathbb{N}_+$$

beschreibe den Speicherplatzbedarf einer Konfiguration

- ▶ definiere:

$$\text{space} : A^+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$w \mapsto \max\{\text{mem}(\Delta^t(\text{init}(w))) \mid t \leq \text{time}(w)\}$$

$$\text{Space} : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$n \mapsto \max\{\text{space}(w) \mid w \in A^n\}$$

- ▶ Was ist hier (unter Umständen) noch unzureichend?

Raumkomplexität für TM: 2. Versuch

- ▶ Definiere:

$$\text{left-end} : A^+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$$

$$w \mapsto \min \{p \in \mathbb{Z} \mid \exists t \leq \text{time}(w) : \\ \text{in } \Delta^t(\text{init}(w)) \text{ wird } p \text{ benutzt}\}$$

$$\text{right-end} : A^+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$$

$$w \mapsto \max \{p \in \mathbb{Z} \mid \exists t \leq \text{time}(w) : \\ \text{in } \Delta^t(\text{init}(w)) \text{ wird } p \text{ benutzt}\}$$

$$\text{space} : A^+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$w \mapsto 1 + \text{right-end}(w) - \text{left-end}(w)$$

$$\text{Space} : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$n \mapsto \max\{\text{space}(w) \mid w \in A^n\}$$

- ▶ Diskussion: andere Ideen?

Definition: Raumkomplexität für TM

- ▶ Definiere:

$$\text{used-mem} : C \rightarrow 2^{\mathbb{Z}}$$

$$c \mapsto \{p \in \mathbb{Z} \mid \text{in } c \text{ wird Feld } p \text{ benutzt}\}$$

$$\text{space} : A^+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$w \mapsto \left| \bigcup_{t \leq \text{time}(w)} \text{used-mem}(\Delta^t(\text{init}(w))) \right|$$

$$\text{Space} : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$$

$$n \mapsto \max\{\text{space}(w) \mid w \in A^n\}$$

- ▶ Feld «benutzt»: Symbol $\neq \square$ oder ein Kopf ist da
- ▶ leicht anpassbar an andere Modelle, z. B. $*W_*$ -TM siehe dort
- ▶ dieses Thema kommt wieder ...

Eine Beispielsprache

Theorem

Jede \mathbb{W}_1 -TM, die die formale Sprache

$$L_{vv} = \{v2^{|v|}v \mid v \in \{0, 1\}^+\}$$

erkennt, hat Zeitkomplexität $\text{Time}_T(n) \in \Omega(n^2)$.



F. C. Hennie

One-tape, Off-line Turing Machine Computations.

Information and Control **8**, S. 553–578, 1965.

Beweis des Satzes von Hennie

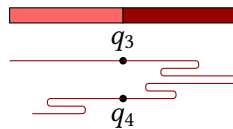
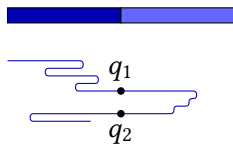
zunächst technisches Hilfsmittel für den Beweis:
sogenannte *Überquerungsfolgen*

Überquerungsfolgen: Definition

sei $w \in A^+$ und $i \in \mathbb{Z}$

- ▶ *Überquerungsfolge* $cs(w, i)$
 - ▶ die Liste der Zustände der TM
 - ▶ bei Übergängen von Feld i nach $i + 1$ oder umgekehrt,
 - ▶ wenn sie mit $\text{init}(w)$ startet
- ▶ Überquerungsfolgen können leer sein.

Zwei Beispielüberquerungsfolgen



Überquerungsfolgen

Definition

Für $w = w_1 \cdots w_n \in A^n$ und $1 \leq i < j \leq |w|$ bezeichne $w[i : j]$ das Teilwort $w_i \cdots w_j$.

Lemma

Es seien w_1 und w_2 Wörter, die von TM «gleich behandelt» werden, d. h. beide akzeptiert oder beide abgelehnt werden.

Es seien i_1 und i_2 zwei Feldnummern mit $1 \leq i_1 < |w_1|$ und $1 \leq i_2 < |w_2|$, so dass $cs(w_1, i_1) = cs(w_2, i_2)$ ist.

Überquerungsfolgen

Definition

Für $w = w_1 \cdots w_n \in A^n$ und $1 \leq i < j \leq |w|$ bezeichne $w[i : j]$ das Teilwort $w_i \cdots w_j$.

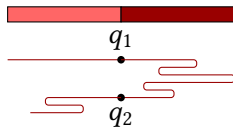
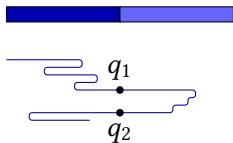
Lemma

Es seien w_1 und w_2 Wörter, die von TM «gleich behandelt» werden, d. h. beide akzeptiert oder beide abgelehnt werden.

Es seien i_1 und i_2 zwei Feldnummern mit $1 \leq i_1 < |w_1|$ und $1 \leq i_2 < |w_2|$, so dass $cs(w_1, i_1) = cs(w_2, i_2)$ ist.

Dann gilt: ... *was?* ...

Beweisskizze zum Lemma



Überquerungsfolgen

Definition

Für $w = w_1 \cdots w_n \in A^n$ und $1 \leq i < j \leq |w|$ bezeichne $w[i : j]$ das Teilwort $w_i \cdots w_j$.

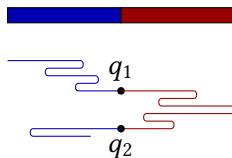
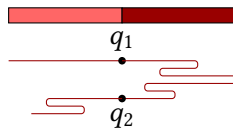
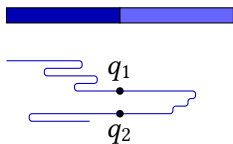
Lemma

Es seien w_1 und w_2 Wörter, die von TM «gleich behandelt» werden, d. h. beide akzeptiert oder beide abgelehnt werden.

Es seien i_1 und i_2 zwei Feldnummern mit $1 \leq i_1 < |w_1|$ und $1 \leq i_2 < |w_2|$, so dass $cs(w_1, i_1) = cs(w_2, i_2)$ ist.

Dann gilt: Das Eingabewort $w_1[1 : i_1] \cdot w_2[i_2 + 1 : |w_2|]$ wird genauso behandelt wie w_1 und w_2 .

Beweisskizze zum Lemma



Satz von Hennie

Theorem

Jede \mathbb{W}_1 -TM, die die formale Sprache

$$L_{vv} = \{v2^{|v|}v \mid v \in \{0, 1\}^+\}$$

erkennt, hat Zeitkomplexität $\text{Time}_T(n) \in \Omega(n^2)$.

Beweis

- ▶ Betrachte verschiedene Wörter $w_1 \in L_{vv}$ und $w_2 \in L_{vv}$ gleicher Länge $n = 3m$.
- ▶ $w_i = v_i 2^m v_i$ mit $v_i \in \{0, 1\}^m$ ($i = 1, 2$)
wegen $w_1 \neq w_2$ auch $v_1 \neq v_2$
- ▶ wegen des eben bewiesenen Lemmas:
 - ▶ Es darf keine Zustandsfolge $s = (s_1, \dots, s_k)$ geben, so dass $cs(w_1, i_1) = s = cs(w_2, i_2)$ für $m/3 < i_1 < 2m/3$ und $m/3 < i_2 < 2m/3$
 - ▶ denn für $v_1 \neq v_2$ ist kein Wort $v_1 2^\ell v_2 \in L_{vv}$.
- ▶ In L_{vv} sind 2^m Wörter der Länge $3m$.

Beweis des Satzes von Hennie (2)

- ▶ zähle alle «kurzen» Überquerungsfolgen, mit Länge $i < m/\log |S|$:
nur

$$\sum_{i=0}^{(m/\log |S|)-1} |S|^i < |S|^{m/\log |S|} = \left(2^{\log |S|}\right)^{m/\log |S|} = 2^m$$

- ▶ für mindestens ein Wort in $L_{vv} \cap A^{3m}$ haben
alle «mittleren» $m - 1$ Überquerungsfolgen Länge $\geq m/\log |S|$
- ▶ jeder Zustand in einer Überquerungsfolge bedeutet einen Schritt
- ▶ also Anzahl Schritte für diese Eingabe $\geq (m - 1)m/\log |S| \in \Omega(n^2)$

andererseits ...

Beobachtung

Es gibt eine \mathbb{W}_1 -TM T mit $\text{Time}_T(n) \in \Theta(n^2)$, die L_{vv} erkennt.

Übung ...

Schreibweise: Komplexitätsklassen



$$\mathbb{W}_1\text{-TM-SPC}(s(n)\text{-TIME}(t(n)))$$

Menge der formalen Sprachen, die von $\mathbb{W}_1\text{-TM } T$ erkannt werden können mit $\text{Space}_T(n) \leq s(n)$ und $\text{Time}_T(n) \leq t(n)$

▶ analog für $\mathbb{W}_1\text{-TM-TIME}(t(n))$, etc.

▶ analog für $\mathbb{W}_1\text{-TM-TIME}(O(t(n)))$, etc.

▶ Beispiele:

▶ $L_{vv} \in \mathbb{W}_1\text{-TM-TIME}(\Theta(n^2))$

▶ $L_{vv} \notin \mathbb{W}_1\text{-TM-TIME}(o(n^2))$

▶ $\mathbb{W}_1\text{-TM-TIME}(\text{Pol}(n)) = \mathbf{P}$

mit $\text{Pol}(t(n)) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} O(t(n)^k)$

Überblick

Turingmaschinen mit einem Arbeitsband

Der rote Faden durch die Vorlesung

Weiteres zu Turingmaschinen mit einem Arbeitsband

Turingmaschinen mit mehreren Arbeitsbändern/Köpfen

Turingmaschinen mit speziellen Bändern

Turingmaschinen mit mehreren Bändern/Köpfen

- ▶ unter Umständen mehrere Köpfe auf einem Band:
 \mathbb{W}_1 oder \mathbb{W}_2 oder \mathbb{W}_3 oder ...
- ▶ falls egal: \mathbb{W}_*
- ▶ unter Umständen mehrere Bänder:
 $\mathbb{W}_{h_1} \mathbb{W}_{h_2} \cdots \mathbb{W}_{h_k}$
- ▶ falls mehrere gleiche Bänder:
z. B. $3\mathbb{W}_5$, $*\mathbb{W}_1$, $*\mathbb{W}_*$
- ▶ alle Köpfe *mit der gleichen Steuereinheit verbunden*

Turingmaschinen mit mehreren Bändern/Köpfen

- ▶ unter Umständen mehrere Köpfe auf einem Band:
 \mathbb{W}_1 oder \mathbb{W}_2 oder \mathbb{W}_3 oder ...
- ▶ falls egal: \mathbb{W}_*
- ▶ unter Umständen mehrere Bänder:
 $\mathbb{W}_{h_1} \mathbb{W}_{h_2} \cdots \mathbb{W}_{h_k}$
- ▶ falls mehrere gleiche Bänder:
z. B. $3\mathbb{W}_5$, $*\mathbb{W}_1$, $*\mathbb{W}_*$
- ▶ alle Köpfe *mit der gleichen Steuereinheit verbunden*

Ist das dann schon Parallelverarbeitung?

Definition von $\mathbb{W}_{h_1} \mathbb{W}_{h_2} \cdots \mathbb{W}_{h_k}$ -TM

- ▶ analog zu \mathbb{W}_1 -TM, aber:

$$\delta : S \times B^{h_1} \times \cdots \times B^{h_k} \rightarrow S \times (B \times D)^{h_1} \times \cdots \times (B \times D)^{h_k}$$

Konfigurationen sehen so aus

Definition von $\mathbb{W}_{h_1} \mathbb{W}_{h_2} \cdots \mathbb{W}_{h_k}$ -TM

- ▶ analog zu \mathbb{W}_1 -TM, aber:

$$\delta : S \times B^{h_1} \times \cdots \times B^{h_k} \rightarrow S \times (B \times D)^{h_1} \times \cdots \times (B \times D)^{h_k}$$

Konfigurationen sehen so aus

- ▶ Problem:

Definition von $\mathbb{W}_{h_1} \mathbb{W}_{h_2} \cdots \mathbb{W}_{h_k}$ -TM

- ▶ analog zu \mathbb{W}_1 -TM, aber:

$$\delta : S \times B^{h_1} \times \cdots \times B^{h_k} \rightarrow S \times (B \times D)^{h_1} \times \cdots \times (B \times D)^{h_k}$$

Konfigurationen sehen so aus

- ▶ Problem: Die TM «merkt nicht», wenn mehrere Köpfe auf dem gleichen Feld stehen.

Definition von $\mathbb{W}_{h_1} \mathbb{W}_{h_2} \cdots \mathbb{W}_{h_k}$ -TM

- ▶ analog zu \mathbb{W}_1 -TM, aber:

$$\delta : S \times B^{h_1} \times \cdots \times B^{h_k} \rightarrow S \times (B \times D)^{h_1} \times \cdots \times (B \times D)^{h_k}$$

Konfigurationen sehen so aus

- ▶ Problem: Die TM «merkt nicht», wenn mehrere Köpfe auf dem gleichen Feld stehen.

Schreibkonflikte ?!

Definition von $\mathbb{W}_{h_1} \mathbb{W}_{h_2} \cdots \mathbb{W}_{h_k}$ -TM

- ▶ analog zu \mathbb{W}_1 -TM, aber:

$$\delta : S \times B^{h_1} \times \cdots \times B^{h_k} \rightarrow S \times (B \times D)^{h_1} \times \cdots \times (B \times D)^{h_k}$$

Konfigurationen sehen so aus

- ▶ Problem: Die TM «merkt nicht», wenn mehrere Köpfe auf dem gleichen Feld stehen.

Schreibkonflikte ?!

- ▶ Lösungsmöglichkeiten:
 - ▶ Verbot
 - ▶ Kopf mit kleinster Nummer gewinnt
 - ▶ spezielles «Kollisionssymbol» wird geschrieben
 - ▶ auch «nichts schreiben» ermöglichen

Definition von $\mathbb{W}_{h_1} \mathbb{W}_{h_2} \cdots \mathbb{W}_{h_k}$ -TM

- ▶ analog zu \mathbb{W}_1 -TM, aber:

$$\delta : S \times B^{h_1} \times \cdots \times B^{h_k} \rightarrow S \times (B \times D)^{h_1} \times \cdots \times (B \times D)^{h_k}$$

Konfigurationen sehen so aus

- ▶ Problem: Die TM «merkt nicht», wenn mehrere Köpfe auf dem gleichen Feld stehen.

Schreibkonflikte ?!

- ▶ Lösungsmöglichkeiten:

- ▶ Verbot
- ▶ Kopf mit kleinster Nummer gewinnt
- ▶ spezielles «Kollisionssymbol» wird geschrieben
- ▶ auch «nichts schreiben» ermöglichen und Konflikte verbieten

Das nehmen wir.

Definition von $\mathbb{W}_{h_1} \mathbb{W}_{h_2} \cdots \mathbb{W}_{h_k}$ -TM

- ▶ *Also:*
$$\delta : S \times B^{h_1} \times \cdots \times B^{h_k} \rightarrow S \times (B_- \times D)^{h_1} \times \cdots \times (B_- \times D)^{h_k}$$
- ▶ mit $B_- = B \cup \{-\}$, wobei das $-$ «nichts schreiben» bedeuten soll
- ▶ Diese Definition ermöglicht einer TM, herauszufinden, ob sich zwei Köpfe auf dem gleichen Feld befinden.
 - ▶ Wie?
 - ▶ also Schreibkonflikte problemlos vermeidbar

Konfigurationen von $*W_*$ -TM

- ▶ $c = (s, b_1, \dots, b_k, (p_{1,1}, \dots, p_{1,h_1}), \dots, (p_{k,1}, \dots, p_{k,h_k}))$ mit
- ▶ $s \in S$
- ▶ $b_i \in B^{\mathbb{Z}}$
- ▶ $p_{i,j} \in \mathbb{Z}$

[zurück](#) zur Definition von δ

Erkennung formaler Sprachen mit $*\mathbb{W}_*-TM$

- ▶ analog wie bei \mathbb{W}_1-TM :
- ▶ Anfangszustand s_0
- ▶ Anfangsbandbeschriftungen
 - ▶ auf erstem Band das Eingabewort
 - ▶ ggf. weitere Bänder leer
- ▶ Köpfe zu Beginn alle auf Feld 1 ihres Bandes
- ▶ finale und akzeptierende Zustände

Zeit- und Raumkomplexität für $*W_*$ -TM

- ▶ Zeitkomplexität wie bei W_1 -TM [siehe dort](#)
- ▶ Raumkomplexität analog zu W_1 -TM [siehe dort](#), aber
used-mem : $C \rightarrow 2^{\mathbb{N}_+ \times \mathbb{Z}}$.

Beispiel L_{vv} mit \mathbb{W}_3 -TM

- ▶ an der Tafel

Beispiel L_{vv} mit \mathbb{W}_3 -TM

- ▶ an der Tafel
- ▶ Ergebnis:

$$L_{vv} \in \mathbb{W}_3\text{-TM-SPC}(\Theta(n))\text{-TIME}(\Theta(n))$$

Beispiel L_{vv} mit \mathbb{W}_3 -TM

- ▶ an der Tafel
- ▶ Ergebnis:

$$L_{vv} \in \mathbb{W}_3\text{-TM-SPC}(\Theta(n))\text{-TIME}(\Theta(n))$$

- ▶ Kurzes Nachdenken zeigt, dass auch gilt:

$$L_{vv} \in \mathbb{W}_2\text{-TM-SPC}(\Theta(n))\text{-TIME}(\Theta(n))$$

Zusammenhang zwischen \mathbb{W}_1 - und $*\mathbb{W}_*$ -TM

Satz

Für alle $s(n)$ und $t(n)$ größer gleich n gilt:

$$*\mathbb{W}_* \text{-TM-SPC}(s(n))\text{-TIME}(t(n))$$

$$\subseteq \mathbb{W}_1 \text{-TM-SPC}(\Theta(s(n)))\text{-TIME}(\Theta(t(n)^2))$$

Zusammenhang zwischen \mathbb{W}_1 - und $*\mathbb{W}_*$ -TM

Satz

Für alle $s(n)$ und $t(n)$ größer gleich n gilt:

$$\begin{aligned} * \mathbb{W}_* \text{-TM-SPC}(s(n))\text{-TIME}(t(n)) \\ \subseteq \mathbb{W}_1 \text{-TM-SPC}(\Theta(s(n)))\text{-TIME}(\Theta(s(n) \cdot t(n))) \\ \subseteq \mathbb{W}_1 \text{-TM-SPC}(\Theta(s(n)))\text{-TIME}(\Theta(t(n)^2)) \end{aligned}$$

- ▶ Beweisidee: an der Tafel

Zusammenhang zwischen \mathbb{W}_1 - und $*\mathbb{W}_*$ -TM

Satz

Für alle $s(n)$ und $t(n)$ größer gleich n gilt:

$$\begin{aligned} * \mathbb{W}_* \text{-TM-SPC}(s(n))\text{-TIME}(t(n)) \\ \subseteq \mathbb{W}_1 \text{-TM-SPC}(\Theta(s(n)))\text{-TIME}(\Theta(s(n) \cdot t(n))) \\ \subseteq \mathbb{W}_1 \text{-TM-SPC}(\Theta(s(n)))\text{-TIME}(\Theta(t(n)^2)) \end{aligned}$$

- ▶ Beweisidee: an der Tafel
- ▶ Beispiel L_{vv} zeigt, dass der Exponent 2 optimal ist.

Zusammenhang zwischen \mathbb{W}_1 - und $*\mathbb{W}_*$ -TM

Satz

Für alle $s(n)$ und $t(n)$ größer gleich n gilt:

$$\begin{aligned} * \mathbb{W}_* \text{-TM-SPC}(s(n))\text{-TIME}(t(n)) \\ \subseteq \mathbb{W}_1 \text{-TM-SPC}(\Theta(s(n)))\text{-TIME}(\Theta(s(n) \cdot t(n))) \\ \subseteq \mathbb{W}_1 \text{-TM-SPC}(\Theta(s(n)))\text{-TIME}(\Theta(t(n)^2)) \end{aligned}$$

- ▶ Beweisidee: an der Tafel
- ▶ Beispiel L_{vv} zeigt, dass der Exponent 2 optimal ist.
- ▶ Umkehrung $\mathbb{W}_1 \rightsquigarrow *\mathbb{W}_*$:

Zusammenhang zwischen \mathbb{W}_1 - und $*\mathbb{W}_*$ -TM

Satz

Für alle $s(n)$ und $t(n)$ größer gleich n gilt:

$$\begin{aligned} * \mathbb{W}_* \text{-TM-SPC}(s(n))\text{-TIME}(t(n)) \\ \subseteq \mathbb{W}_1 \text{-TM-SPC}(\Theta(s(n)))\text{-TIME}(\Theta(s(n) \cdot t(n))) \\ \subseteq \mathbb{W}_1 \text{-TM-SPC}(\Theta(s(n)))\text{-TIME}(\Theta(t(n)^2)) \end{aligned}$$

- ▶ Beweisidee: an der Tafel
- ▶ Beispiel L_{ov} zeigt, dass der Exponent 2 optimal ist.
- ▶ Umkehrung $\mathbb{W}_1 \rightsquigarrow *\mathbb{W}_*$:
keine wesentlichen Beschleunigungssätze bekannt

Zusammenhang zwischen \mathbb{W}_1 - und $*\mathbb{W}_*$ -TM

etwas kompakter (ohne « n ») notiert:

Satz

Für alle Raumschranken $s \geq id$ und Zeitschranken $t \geq id$ gilt:

$$\begin{aligned} *\mathbb{W}_* \text{-TM-SPC}(s)\text{-TIME}(t) &\subseteq \mathbb{W}_1\text{-TM-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(s \cdot t)) \\ &\subseteq \mathbb{W}_1\text{-TM-SPC}(\Theta(s))\text{-TIME}(\Theta(t^2)) \end{aligned}$$

Zusammenhang bei TM mit gleicher Gesamtkopfzahl

Zusammenhang bei TM mit gleicher Gesamtkopfzahl

Satz

Für alle $t(n) \geq n$ gilt:

$$\mathbb{W}_k\text{-TM-TIME}(t(n)) \subseteq k\mathbb{W}_1\text{-TM-TIME}(\Theta(t(n)))$$



H. J. Stoß.

k -Band-Simulation von k -Kopf-Turing-Maschinen.

Computing, 6:309–317, 1970.

- ▶ Richtung $k\mathbb{W}_1 \rightsquigarrow \mathbb{W}_k$ ist viel leichter ...
- ▶ Satz ist *nichttrivial* — man versuche sich an einem Beweis ...

Überblick

Turingmaschinen mit einem Arbeitsband

Der rote Faden durch die Vorlesung

Weiteres zu Turingmaschinen mit einem Arbeitsband

Turingmaschinen mit mehreren Arbeitsbändern/Köpfen

Turingmaschinen mit speziellen Bändern

Motivation

Erkennung einer regulären Sprache mit einer \mathbb{W}_1 -TM:

Motivation

Erkennung einer regulären Sprache mit einer \mathbb{W}_1 -TM:

- ▶ TM fährt *nur lesend* nur einmal über das Wort

Motivation

Erkennung einer regulären Sprache mit einer \mathbb{W}_1 -TM:

- ▶ TM fährt *nur lesend* nur einmal über das Wort
- ▶ «Arbeits»-Band nicht als Speicher (berechneter Informationen) benötigt
- ▶ Definition von Raumkomplexität nimmt darauf keine Rücksicht. (könnte sie?)
- ▶ Man möchte aber gerne sublineare Raumkomplexitäten, z. B. 0 im Fall regulärer Sprachen.
- ▶ analoges Problem in Kapitel 5 mit «großen» Ausgaben

Separates Eingabeband für TM

Eingabeband \square

- ▶ wird bei der Bestimmung der Raumkomplexität ignoriert

Separates Eingabeband für TM

Eingabeband \sqsubseteq

- ▶ wird bei der Bestimmung der Raumkomplexität ignoriert
- ▶ kann nur gelesen werden

Separates Eingabeband für TM

Eingabeband \sqsubseteq

- ▶ wird bei der Bestimmung der Raumkomplexität ignoriert
- ▶ kann nur gelesen werden
- ▶ hat nur einen einzigen Kopf

Separates Eingabeband für TM

Eingabeband \square

- ▶ wird bei der Bestimmung der Raumkomplexität ignoriert
- ▶ kann nur gelesen werden
- ▶ hat nur einen einzigen Kopf
 - ▶ Diskussion: warum?

Separates Eingabeband für TM

Eingabeband \sqsubseteq

- ▶ wird bei der Bestimmung der Raumkomplexität ignoriert
- ▶ kann nur gelesen werden
- ▶ hat nur einen einzigen Kopf
 - ▶ Diskussion: warum?
- ▶ Kopf darf nur auf Eingabesymbolen und erstem Nachbarfeld links/rechts davon stehen

Separates Eingabeband für TM

Eingabeband \square

- ▶ wird bei der Bestimmung der Raumkomplexität ignoriert
- ▶ kann nur gelesen werden
- ▶ hat nur einen einzigen Kopf
 - ▶ Diskussion: warum?
- ▶ Kopf darf nur auf Eingabesymbolen und erstem Nachbarfeld links/rechts davon stehen
 - ▶ Diskussion: warum?

Separates Eingabeband für TM

Eingabeband \mathbb{E}

- ▶ wird bei der Bestimmung der Raumkomplexität ignoriert
- ▶ kann nur gelesen werden
- ▶ hat nur einen einzigen Kopf
 - ▶ Diskussion: warum?
- ▶ Kopf darf nur auf Eingabesymbolen und erstem Nachbarfeld links/rechts davon stehen
 - ▶ Diskussion: warum?
- ▶ Schreibweise: z. B. $\mathbb{E}\text{-}\mathbb{W}_1\text{-TM}$

Beispiel: Erkennung L_{vv} mit einer \mathbb{E} - W_1 -TM

- ▶ an der Tafel: Variante mit kleiner Raumkomplexität

Beispiel: Erkennung L_{vv} mit einer $\mathbb{E}\text{-}\mathbb{W}_1\text{-TM}$

- ▶ an der Tafel: Variante mit kleiner Raumkomplexität
- ▶ Ergebnis:

$$L_{vv} \in \mathbb{E}\text{-}\mathbb{W}_1\text{-TM-SPC}(\Theta(\log n))\text{-TIME}(\text{Pol}(n))$$

Beispiel: Erkennung L_{vv} mit einer $\mathbb{E}\text{-}\mathbb{W}_1\text{-TM}$

- ▶ an der Tafel: Variante mit kleiner Raumkomplexität
- ▶ Ergebnis:

$$L_{vv} \in \mathbb{E}\text{-}\mathbb{W}_1\text{-TM-SPC}(\Theta(\log n))\text{-TIME}(\text{Pol}(n))$$

- ▶ was hat das in dieser Vorlesung zu suchen ...? ...

Separates Ausgabeband für TM

Ausgabeband Δ

- ▶ für Berechnungen mit «nichttrivial großem» Ergebnis
- ▶ wird bei der Bestimmung der Raumkomplexität ignoriert
- ▶ anfangs immer leer
- ▶ nur einen einzigen Kopf darauf

Separates Ausgabeband für TM

Ausgabeband \mathbb{A}

- ▶ für Berechnungen mit «nichttrivial großem» Ergebnis
- ▶ wird bei der Bestimmung der Raumkomplexität ignoriert
- ▶ anfangs immer leer
- ▶ nur einen einzigen Kopf darauf
- ▶ der nur schreiben und sich nur nach rechts bewegen kann
- ▶ Schreibweise: z. B. $\mathbb{A}\text{-}\mathbb{W}_1\text{-TM}$

Zusammenfassung

- ▶ \mathbb{W}_1 -Turingmaschinen benötigen zur Erkennung von L_{vv} mindestens quadratische Zeit.
- ▶ Mit einer \mathbb{W}_2 -Turingmaschine kann man L_{vv} in Linearzeit erkennen.
- ▶ Mit einer $\mathbb{E}\text{-}\mathbb{W}_1$ -Turingmaschine kann man L_{vv} auf logarithmischem Platz erkennen.
- ▶ Eingabe- und Ausgabebänder werden bei der Bestimmung der Raumkomplexität einer TM nicht berücksichtigt.