

# Algorithmen in Zellularautomaten

## 13. ZA-Modelle mit wenigen Zuständen

Thomas Worsch

Fakultät für Informatik  
Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2017

## Ziele

- ▶ einige (sehr) einfache ZA als Modelle realer Phänomene (Diffusion, Strömung, Magnetisierung, Verkehr)
- ▶ einige nützliche Techniken (Random Walks, Block-ZA, partitionierte ZA)

# Überblick

- Pseudo-Zufallsbits
- Random Walks
- Block- und partitionierte ZA
- Verkehrssimulation

## Algorithmus: ein Pseudozufallsbit pro Zelle

- ▶  $N = H_1^{(2)}$
- ▶  $Q = \{0, 1\}$
- ▶  $C = (0, 0)$
- ▶ **N, O, S, W**: die vier „Himmelsrichtungen“
- ▶ Überföhrungsfunktion:

$$\delta(\ell) = \ell(C) \cdot \ell(N) \oplus \ell(O) \oplus \ell(S) \oplus \ell(W)$$

## Algorithmus: zwei Pseudozufallsbits pro Zelle

Zustand  $q$  einer Zelle bestehe aus zwei Bits  $q[0]$  und  $q[1]$ :

$$\delta(\ell)[0] = \ell(\mathbf{C})[0] \cdot \ell(\mathbf{O})[0] \oplus \ell(\mathbf{N})[0] \oplus \ell(\mathbf{S})[0] \oplus \ell(\mathbf{W})[1]$$

$$\delta(\ell)[1] = \ell(\mathbf{C})[1] \cdot \ell(\mathbf{O})[1] \oplus \ell(\mathbf{N})[1] \oplus \ell(\mathbf{S})[1] \oplus \ell(\mathbf{W})[0]$$

# Überblick

- Pseudo-Zufallsbits
- **Random Walks**
- Block- und partitionierte ZA
- Verkehrssimulation

## Random Walk

Objekt bewegt sich in diskreten Schritten zufällig

mit Wahrscheinlichkeit  $p_n$  zu Nachbarzelle  $n$  (mit  $\sum_{n \in N} p_n = 1$ )

Zum Beispiel:

- ▶  $p_1 = p_{-1} = 1/4$  und  $p_0 = 1/2$
- ▶  $p_1 = p_{-1} = 1/2$
- ▶  $p_{-2} = 1/9, p_{-1} = 2/9, p_0 = 2/9, p_1 = 4/9$

## Rechnung (Random Walk im Eindimensionalen)

- ▶  $N = H_1^{(1)}$
- ▶  $p(t, x)$ : Wahrscheinlichkeit, dass Partikel zum Zeitpunkt  $t$  an Stelle  $x$
- ▶ ein Schritt: Fortschreiten der Zeit um  $\Delta t$
- ▶ Nachbarzellen  $\Delta x$  entfernt
- ▶  $p_1 = p_{-1} = \alpha$  mit  $0 < \alpha < 1/2$

Dann gilt:

$$p(t + \Delta t, x) = \alpha p(t, x - \Delta x) + \alpha p(t, x + \Delta x) + (1 - 2\alpha)p(t, x)$$



Taylorentwicklung und (geeignetes) Abbrechen nach den ersten Summanden ergibt:

$$p(t + \Delta t, x) \approx p(t, x) + \Delta t \frac{\partial p}{\partial t}(t, x)$$

$$p(t, x - \Delta x) \approx p(t, x) - \Delta x \frac{\partial p}{\partial x}(t, x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t, x)$$

$$p(t, x + \Delta x) \approx p(t, x) + \Delta x \frac{\partial p}{\partial x}(t, x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t, x)$$

Einsetzen in

$$p(t + \Delta t, x) = \alpha p(t, x - \Delta x) + \alpha p(t, x + \Delta x) + (1 - 2\alpha)p(t, x)$$

liefert ...

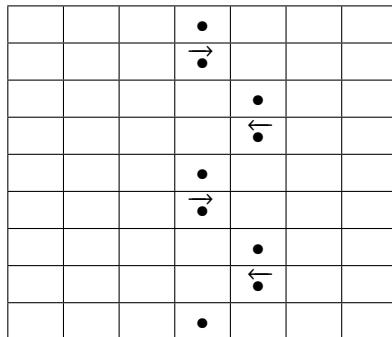
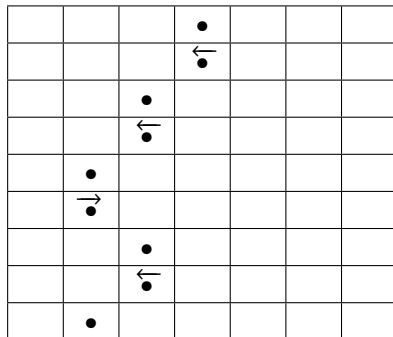
$$\begin{aligned} p(t, x) + \Delta t \frac{\partial p}{\partial t}(t, x) \\ \approx \alpha p(t, x) - \alpha \Delta x \frac{\partial p}{\partial x}(t, x) + \alpha \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t, x) \\ + \alpha p(t, x) + \alpha \Delta x \frac{\partial p}{\partial x}(t, x) + \alpha \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t, x) \\ + (1 - 2\alpha)p(t, x) \end{aligned}$$

Also:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t, x) \approx \alpha \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t, x)$$

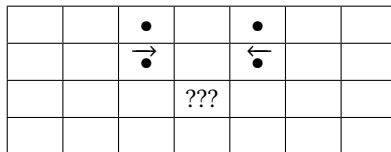
## Wie könnte man eindimensionale Random Walks implementieren?

## Ein Random Walker in einem eindimensionalen ZA



## Problem:

## Problem: mehrere „Random Walker“



Was tun?

# Überblick

- Pseudo-Zufallsbits
- Random Walks
- Block- und partitionierte ZA
- Verkehrssimulation

## Definition

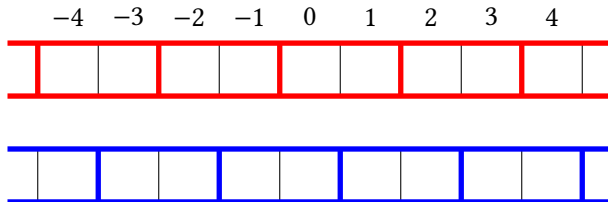
- ▶ **lokale Blocküberföhrungsfunktion**
  - ▶ deterministisch:  $\beta : Q^N \rightarrow Q^N$
  - ▶ probabilistisch:  $\beta : Q^N \rightarrow [0; 1]^{Q^N}$
- ▶ legt für jede lokale Konfiguration  $\ell : N \rightarrow Q$  neue Zustände (Wahrscheinlichkeitsverteilungen) von Zuständen
- ▶ für *alle* Zellen der Nachbarschaft fest
- ▶ Benutzung: Parkettierung von  $R$  mit Kacheln  $N$ , auf denen  $\beta$  angewendet wird
- ▶ **Blockzellularautomat**



## Beispiel

$$R = \mathbb{Z}, N = \{0, 1\}.$$

zwei Parkettierungen:



## Beispiel Odd-Even-Transposition-Sort

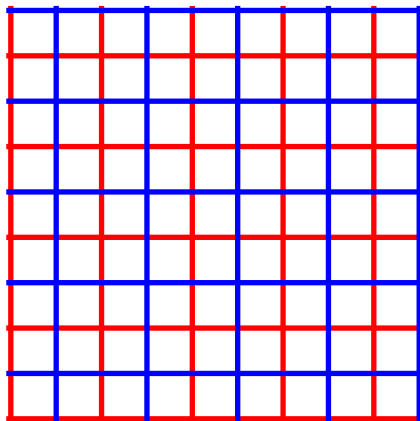
Blockzellularautomat mit  $N = \{0, 1\}$ :

$$\beta([a, b]) = \begin{cases} [a, b] & \text{falls } a \leq b \vee a = \# \vee b = \# \\ [b, a] & \text{falls } a > b \end{cases}$$

#	1	7	4	6	3	5	2	#
#	1	4	7	3	6	2	5	#
#	1	4	3	7	2	6	5	#
#	1	3	4	2	7	5	6	#
#	1	3	2	4	5	7	6	#
#	1	2	3	4	5	6	7	#

## Definition

**Margolus-Nachbarschaft** im Zweidimensionalen:  $2 \times 2$ -Blöcke  
abwechselnde Benutzung diagonal versetzter Parkettierungen



## Lemma

Jeder Block-Zellularautomat mit zyklisch durchlaufener Folge von Kachelungen kann von einem normalen ZA (mit gegebenenfalls größerer Zustandsmenge und Nachbarschaft) Schritt für Schritt mit einer Verlangsamung um konstanten Faktor simuliert werden.

**Beweis:** Übung

## Lemma

Die Umkehrung gilt auch.

**Beweis:** Übung

## Beispiel (Random Walk vieler Teilchen)

- ▶ eindimensional:
  
- ▶ zweidimensional:

## Beispiel (Random Walk vieler Teilchen)

- ▶ eindimensional:  
vertausche Zustände in Zweierblock oder nicht
- ▶ zweidimensional:

## Beispiel (Random Walk vieler Teilchen)

- ▶ eindimensional:  
vertausche Zustände in Zweierblock oder nicht
- ▶ zweidimensional:  
rotiere Teilchen in jeder Kachel zufällig  
im Uhrzeigersinn oder entgegen dem Uhrzeigersinn

## Gittergase (engl. lattice gases)

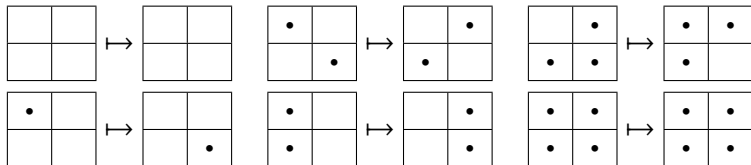
- ▶ Partikelmodelle für (manche) strömende Flüssigkeiten und Gase.
- ▶ einfachster Fall: in jeder Zelle für jeden Nachbarn ein Bit:
  - ▶ 1: Partikel, das sich im nächsten Schritt zum Nachbarn bewegt.
  - ▶ 0: kein Partikel
- ▶ Überföhrungsfunktion mit 2 Phasen
  1. Bewegungen der Partikel
  2. „Kollisionen“ mehrerer Partikel
- ▶ häufig Überföhrungsfunktionen mit
  - ▶ Rotationssymmetrie
  - ▶ „Massenerhaltung“
  - ▶ „Impulserhaltung“



## Beispiel: HPP (Hardy, de Pazzis, Pomeau)

Beschreibung (einer Variante) von HPP-GAS als Block-ZA:

- ▶ Margolus-Nachbarschaft mit  $2 \times 2$ -Blöcken
- ▶  $Q = \{0, 1\}$
- ▶ Kollision: wenn genau zwei Partikel zusammentreffen, die aus entgegengesetzten Richtungen kommen; sie werden dann um  $90^\circ$  abgelenkt.



## Definition: partitionierter Zellularautomat

- ▶ Zustandsmenge  $Q = P^N$
- ▶ Arbeitsweise beschrieben durch  $\delta' : P^N \rightarrow P^N$
- ▶ Für Bestimmung des neuen Zustandes einer Zelle  $i$  wird von Zelle  $i + \mathbf{n}$  nur die Zustandskomponente  $c_{i+\mathbf{n}}(\mathbf{n})$  verwendet.

## Beispiel: FHP (Frisch, Hasslacher, Pomeau)

- ▶ hexagonales Gitter
- ▶ jede Zelle hat sechs Nachbarn
- ▶  $Q = \{0, 1\}^6$
- ▶ Kollisionsregel: Wenn der „Gesamtimpuls“ der ankommenden Teilchen 0 ist und nicht 4 Teilchen ankommen, dann werden alle Teilchen um  $60^\circ$  im Uhrzeigersinn oder entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn (zufällige Wahl) abgelenkt.

## Beispiel: FHP III

- ▶ siebtes Bit für ein „ruhendes Teilchen“ in jeder Zelle
- ▶ Regeln (bis auf Rotation):

## Beispiel: Ising Systeme

- ▶ Nachbarschaft:  $H_1^{(2)}$
- ▶ Zustandsmenge:  $\{\uparrow, \downarrow\}$  „Spin“
- ▶ Vorstellung: „kleine (Elementar-)Magnete“
- ▶ benachbarte Spins antiparallel ( $\uparrow\downarrow$  oder  $\downarrow\uparrow$ ): „Energie gespeichert“  
benachbarte Spins parallel ( $\downarrow\downarrow$  oder  $\uparrow\uparrow$ ): „keine Energie gespeichert“
- ▶ energierhaltende Änderung möglichst vieler Spins:

## Beispiel: Ising Systeme

- ▶ Nachbarschaft:  $H_1^{(2)}$
- ▶ Zustandsmenge:  $\{\uparrow, \downarrow\}$  „Spin“
- ▶ Vorstellung: „kleine (Elementar-)Magnete“
- ▶ benachbarte Spins antiparallel ( $\uparrow\downarrow$  oder  $\downarrow\uparrow$ ): „Energie gespeichert“  
benachbarte Spins parallel ( $\downarrow\downarrow$  oder  $\uparrow\uparrow$ ): „keine Energie gespeichert“
- ▶ energieerhaltende Änderung möglichst vieler Spins:
  - ▶ mit Schachbrettmuster initialisiertes „Aktivitätsbit“, das in jeder Zelle hin- und herkippt
  - ▶ Spin wird genau dann gewechselt, wenn Zelle aktiv und genau 2 der 4 Nachbarzellen den gleichen Spin haben wie die Zelle selbst.

# Überblick

- Pseudo-Zufallsbits
- Random Walks
- Block- und partitionierte ZA
- **Verkehrssimulation**

## Beispiel: Modell von Nagel und Schreckenberg

- ▶ Zelle entspricht 7.5 m Straße.
- ▶ Zelle kann leer oder von einem Auto besetzt.
- ▶ „Geschwindigkeit“  $v$ : ganze Zahl zwischen 0 und  $v_{\max} = 5$ .
- ▶ modellierte Höchstgeschwindigkeit:

$$1 \frac{\text{Schritt}}{s} \cdot 5 \frac{\text{Zelle}}{\text{Schritt}} \cdot 7.5 \frac{m}{\text{Zelle}} = \frac{5 \cdot 7.5 \cdot 3600}{1000} \frac{km}{h} = 135 \frac{km}{h}$$



## Modell von Nagel und Schreckenberg

- ▶ lokale Überföhrungsfunktion besteht aus drei Phasen:
  1. Beschleunigung:  $v' \leftarrow \min(v + 1, v_{\max}, g)$ ,  
wobei  $g$  die Anzahl freier Zellen vor dem Auto ist.
  2. Trödeln:  $v'' \leftarrow \max(v' - 1, 0)$   
mit kleiner Wahrscheinlichkeit  $p$ .
  3. Fahren: Das Fahrzeug bewegt sich um  $v''$  Zellen weiter;  
 $v \leftarrow v''$ .
  
- ▶ ähnliche Ansätze für Fußgängersimulation

## Zusammenfassung

- ▶ In manchen Fällen kommt man auch schon mit wenigen Zuständen pro Zelle zu guten Modelle für reale Phänomene.
- ▶ Wichtige Konzepte, die hierbei teils wesentlich oder teils sehr nützlich sein können, sind
  - ▶ (Pseudo-)Randomisierung, z.B. für Random Walks, und
  - ▶ Block- und partitionierte Zellularautomaten.