Algorithmen in Zellularautomaten

13. ZA-Modelle mit wenigen Zuständen

Thomas Worsch

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Sommersemester 2018

Ziele

- einige (sehr) einfache ZA als Modelle realer Phänomene (Diffusion, Strömung, Magnetisierung, Verkehr)
- einige nützliche Techniken (Random Walks, Block-ZA, partitionierte ZA)

Überblick

- Pseudo-Zufallsbits
- Random Walks
- Block- und partitionierte ZA
- Verkehrssimulation

Algorithmus: ein Pseudozufallsbit pro Zelle

- $N = H_1^{(2)}$
- $Q = \{0, 1\}$
- $C = (0, 0)$
- N, O, S, W: die vier „Himmelsrichtungen“
- Überführungsfunktion:

$$\delta(\ell) = \ell(C) \cdot \ell(N) \oplus \ell(O) \oplus \ell(S) \oplus \ell(W)$$

Algorithmus: zwei Pseudozufallsbits pro Zelle

Zustand q einer Zelle bestehe aus zwei Bits $q[0]$ und $q[1]$:

$$\delta(\ell)[0] = \ell(C)[0] \cdot \ell(O)[0] \oplus \ell(N)[0] \oplus \ell(S)[0] \oplus \ell(W)[1]$$
$$\delta(\ell)[1] = \ell(C)[1] \cdot \ell(O)[1] \oplus \ell(N)[1] \oplus \ell(S)[1] \oplus \ell(W)[0]$$

Überblick

- Pseudo-Zufallsbits
- Random Walks
- Block- und partitionierte ZA
- Verkehrssimulation

Random Walk

Objekt bewegt sich in diskreten Schritten zufällig
mit Wahrscheinlichkeit p_n zu Nachbarzelle n (mit $\sum_{n \in N} p_n = 1$)

Zum Beispiel:

- $p_1 = p_{-1} = 1/4$ und $p_0 = 1/2$
- $p_1 = p_{-1} = 1/2$
- $p_{-2} = 1/9, p_{-1} = 2/9, p_0 = 2/9, p_1 = 4/9$

Rechnung (Random Walk im Eindimensionalen)

- $N = H_1^{(1)}$
- $p(t, x)$: Wahrscheinlichkeit, dass Partikel zum Zeitpunkt t an Stelle x
- ein Schritt: Fortschreiten der Zeit um Δt
- Nachbarzellen Δx entfernt
- $p_1 = p_{-1} = \alpha$ mit $0 < \alpha < 1/2$

Dann gilt:

$$p(t + \Delta t, x) = \alpha p(t, x - \Delta x) + \alpha p(t, x + \Delta x) + (1 - 2\alpha) p(t, x)$$

Taylorentwicklung und (geeignetes) Abbrechen nach den ersten Summanden ergibt:

$$\begin{aligned}
p(t+\Delta t, x) &\approx p(t,x) + \Delta t \frac{\partial p}{\partial t}(t,x) \\
p(t, x-\Delta x) &\approx p(t,x) - \Delta x \frac{\partial p}{\partial x}(t,x) + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t,x) \\
p(t, x+\Delta x) &\approx p(t,x) + \Delta x \frac{\partial p}{\partial x}(t,x) + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t,x)
\end{aligned}$$

Einsetzen in

$$p(t+\Delta t, x) = \alpha p(t, x-\Delta x) + \alpha p(t, x+\Delta x) + (1-2\alpha)p(t,x)$$

liefert …

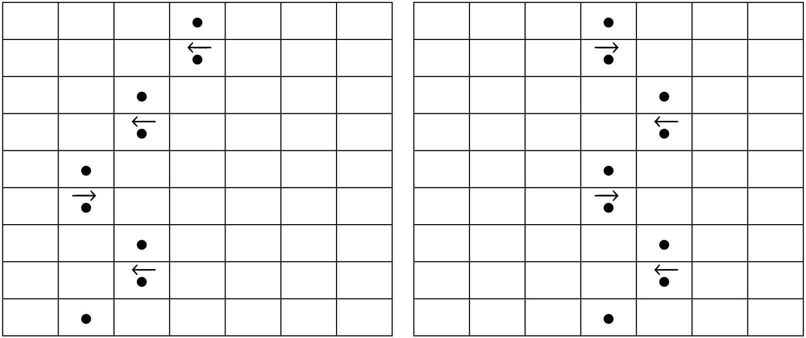
$$
\begin{aligned}
& p(t,x) + \Delta t \frac{\partial p}{\partial t}(t,x) \\
\approx \quad & \alpha p(t,x) - \alpha \Delta x \frac{\partial p}{\partial x}(t,x) + \alpha \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t,x) \\
& + \alpha p(t,x) + \alpha \Delta x \frac{\partial p}{\partial x}(t,x) + \alpha \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t,x) \\
& + (1 - 2\alpha) p(t,x)
\end{aligned}
$$

Also:

$$
\frac{\partial p}{\partial t}(t,x) \approx \alpha \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t,x)
$$

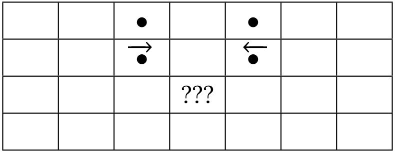
Wie könnte man eindimensionale Random Walks implementieren?

Ein Random Walker in einem eindimensionalen ZA



Problem:

Problem: mehrere „Random Walker“



Was tun?

Überblick

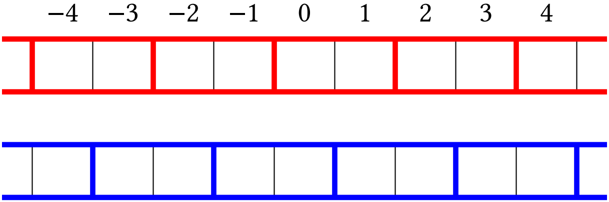
- Pseudo-Zufallsbits
- Random Walks
- Block- und partitionierte ZA
- Verkehrssimulation

Definition

- **lokale Blocküberführungsfunktion**
  - deterministisch: $\beta : Q^N \to Q^N$
  - probabilistisch: $\beta : Q^N \to [0;1]^{Q^N}$
- legt für jede lokale Konfiguration $\ell : N \to Q$
  neue Zustände (Wahrscheinlichkeitsverteilungen) von Zuständen
- für *alle* Zellen der Nachbarschaft fest
- Benutzung: Parkettierung von R mit Kacheln N,
  auf denen β angewendet wird
- **Blockzellularautomat**

Beispiel

$R = \mathbb{Z}$, $N = \{0, 1\}$.
zwei Parkettierungen:



Beispiel Odd-Even-Transposition-Sort

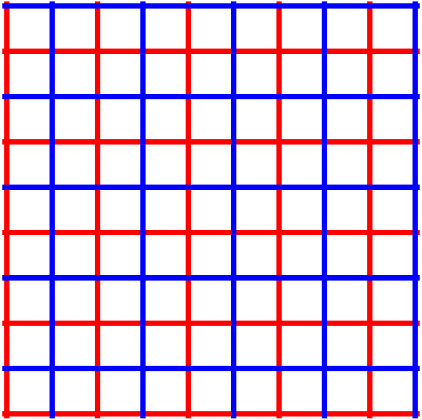
Blockzellularautomat mit $N = \{0, 1\}$:

$$\beta([a,b]) = \begin{cases} [a,b] & \text{falls } a \le b \lor a = \# \lor b = \# \\ [b,a] & \text{falls } a > b \end{cases}$$

#	1	7	4	6	3	5	2	#
#	1	4	7	3	6	2	5	#
#	1	4	3	7	2	6	5	#
#	1	3	4	2	7	5	6	#
#	1	3	2	4	5	7	6	#
#	1	2	3	4	5	6	7	#

Definition

Margolus-Nachbarschaft im Zweidimensionalen: 2×2-Blöcke
abwechselnde Benutzung diagonal versetzter Parkettierungen



Lemma

Jeder Block-Zellularautomat mit zyklisch durchlaufener Folge von Kachelungen kann von einem normalen ZA (mit gegebenenfalls größerer Zustandsmenge und Nachbarschaft) Schritt für Schritt mit einer Verlangsamung um konstanten Faktor simuliert werden.
Beweis: Übung

Lemma

Die Umkehrung gilt auch.
Beweis: Übung

Beispiel (Random Walk vieler Teilchen)

- eindimensional:

- zweidimensional:

Beispiel (Random Walk vieler Teilchen)

- eindimensional:
  vertausche Zustände in Zweierblock oder nicht
- zweidimensional:

Beispiel (Random Walk vieler Teilchen)

- eindimensional:
  vertausche Zustände in Zweierblock oder nicht
- zweidimensional:
  rotiere Teilchen in jeder Kachel zufällig
  im Uhrzeigersinn oder entgegen dem Uhrzeigersinn

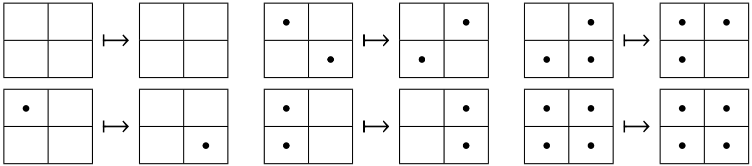
Gittergase (engl. lattice gases)

- Partikelmodelle für (manche) strömende Flüssigkeiten und Gase.
- einfachster Fall: in jeder Zelle für jeden Nachbarn ein Bit:
  - 1: Partikel, das sich im nächsten Schritt zum Nachbarn bewegt.
  - 0: kein Partikel
- Überführungsfunktion mit 2 Phasen
  1. Bewegungen der Partikel
  2. „Kollisionen“ mehrerer Partikel
- häufig Überführungsfunktionen mit
  - Rotationssymmetrie
  - „Massenerhaltung“
  - „Impulserhaltung“

Beispiel: HPP (Hardy, de Pazzis, Pomeau)

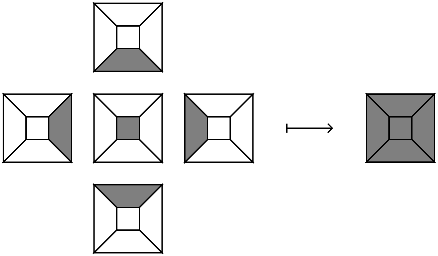
Beschreibung (einer Variante) von `HPP-GAS` als Block-ZA:

- Margolus-Nachbarschaft mit 2×2-Blöcken
- $Q = \{0, 1\}$
- Kollision: wenn genau zwei Partikel zusammentreffen, die aus entgegengesetzten Richtungen kommen; sie werden dann um $90°$ abgelenkt.



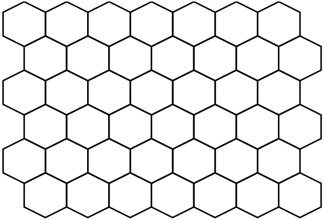
Definition: partitionierter Zellularautomat

- Zustandsmenge $Q = P^N$
- Arbeitsweise beschrieben durch $\delta' : P^N \longrightarrow P^N$
- Für Bestimmung des neuen Zustandes einer Zelle i wird von Zelle $i + n$ nur die Zustandskomponente $c_{i+n}(n)$ verwendet.



Beispiel: FHP (Frisch, Hasslacher, Pomeau)

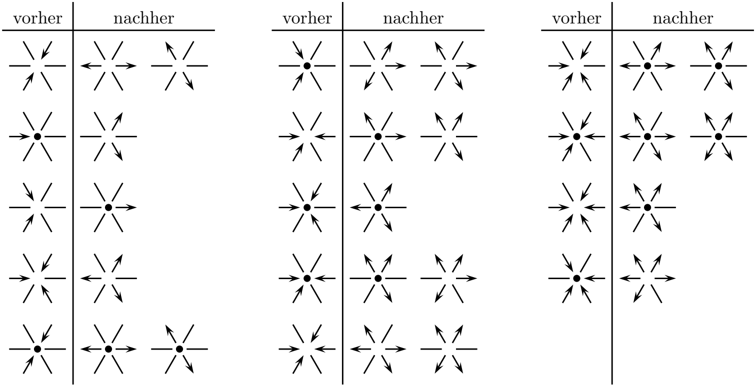
- hexagonales Gitter



- jede Zelle hat sechs Nachbarn
- $Q = \{0, 1\}^6$
- Kollisionsregel: Wenn der „Gesamtimpuls“ der ankommenden Teilchen 0 ist und nicht 4 Teilchen ankommen, dann werden alle Teilchen um 60° im Uhrzeigersinn oder entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn (zufällige Wahl) abgelenkt.

Beispiel: FHP III

- siebtes Bit für ein „ruhendes Teilchen“ in jeder Zelle
- Regeln (bis auf Rotation):



Beispiel: Ising Systeme

- Nachbarschaft: $H_1^{(2)}$
- Zustandsmenge: $\{\uparrow, \downarrow\}$ „Spin“
- Vorstellung: „kleine (Elementar-)Magnete“
- benachbarte Spins antiparallel ($\uparrow\downarrow$ oder $\downarrow\uparrow$): „Energie gespeichert“
  benachbarte Spins parallel ($\downarrow\downarrow$ oder $\uparrow\uparrow$): „keine Energie gespeichert“
- energieerhaltende Änderung möglichst vieler Spins:

Beispiel: Ising Systeme

- Nachbarschaft: $H_1^{(2)}$
- Zustandsmenge: $\{\uparrow, \downarrow\}$ „Spin“
- Vorstellung: „kleine (Elementar-)Magnete“
- benachbarte Spins antiparallel ($\uparrow\downarrow$ oder $\downarrow\uparrow$): „Energie gespeichert“
  benachbarte Spins parallel ($\downarrow\downarrow$ oder $\uparrow\uparrow$): „keine Energie gespeichert“
- energieerhaltende Änderung möglichst vieler Spins:
  - mit Schachbrettmuster initialisiertes „Aktivitätsbit“, das in jeder Zelle hin- und herkippt
  - Spin wird genau dann gewechselt, wenn Zelle aktiv und genau 2 der 4 Nachbarzellen den gleichen Spin haben wie die Zelle selbst.

Überblick

- Pseudo-Zufallsbits
- Random Walks
- Block- und partitionierte ZA
- Verkehrssimulation

Beispiel: Modell von Nagel und Schreckenberg

- Zelle entspricht 7.5 m Straße.
- Zelle kann leer oder von einem Auto besetzt.
- „Geschwindigkeit“ v: ganze Zahl zwischen 0 und $v_{\max} = 5$.
- modellierte Höchstgeschwindigkeit:

$$1\frac{Schritt}{s} \cdot 5\frac{Zelle}{Schritt} \cdot 7.5\frac{m}{Zelle} = \frac{5 \cdot 7.5 \cdot 3600}{1000}\frac{km}{h} = 135\frac{km}{h}$$

Modell von Nagel und Schreckenberg

- lokale Überführungsfunktion besteht aus drei Phasen:
  1. Beschleunigung: $v' \leftarrow \min(v+1, v_{\max}, g)$,
     wobei g die Anzahl freier Zellen vor dem Auto ist.
  2. Trödeln: $v'' \leftarrow \max(v'-1, 0)$
     mit kleiner Wahrscheinlichkeit p.
  3. Fahren: Das Fahrzeug bewegt sich um v'' Zellen weiter;
     $v \leftarrow v''$.
- ähnliche Ansätze für Fußgängersimulation

Zusammenfassung

- In manchen Fällen kommt man auch schon mit wenigen Zuständen pro Zelle zu guten Modelle für reale Phänomene.
- Wichtige Konzepte, die hierbei teils wesentlich oder teils sehr nützlich sein können, sind
  - (Pseudo-)Randomisierung, z.B. für Random Walks, und
  - Block- und partitionierte Zellularautomaten.