

Algorithmen in Zellularautomaten

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 9.1

Überlegen Sie sich einen Sortieralgorithmus für 2-dimensionale ZA für die Sortierreihenfolge:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Lösung 9.1

Grobe Idee: Man sortiert erst in Schlangenlinienform und spiegelt anschließend jede zweite Zeile.

Aufgabe 9.2

Überlegen Sie sich einen ZA-Algorithmus für das gleichmäßige Verteilen der Spalten eines Blockes auf alle Blöcke einer Zeile wie es im Algorithmus von Schnorr und Shamir benötigt wird.

Lösung 9.2

Wir beschreiben den Algorithmus anhand der folgenden Konfiguration. Sie besteht aus 3 Blöcken, deren Ränder durch senkrechte Dreifachlinien gekennzeichnet sind, und die jeweils 6 Zellen lang sind. Das Verhältnis 3/6 kann im Sortieralgorithmus nicht auftreten, aber für die Demonstration der Arbeitsweise ist es ausreichend.

?a1	b1	c1	?a2	b2	c2	?a3	b3	c3	?a4	b4	c4	?a5	b5	c5	?a6	b6	c6

Wir gehen davon aus, dass die erste Zelle jedes Blockes von 3 Zellen markiert ist (im Bild oben mit einem ?).

Ziel ist, die folgende Konfiguration zu erreichen:

a1	a2	a3	a4	a5	a6	b1	b2	b3	b4	b5	b6	c1	c2	c3	c4	c5	c6

Grundsätzlich besteht der Plan des Algorithmus darin, die drei Register wie folgt zu verwenden:

- R1. In den ersten Registern werden alle Werte nach links bis zum äußersten Rand geschoben.
- R2. Von dort werden sie in den mittleren Registern wieder nach rechts geschoben.
- R3. Mit Hilfe geeigneter Markierungen und deren Veränderungen zu wird sichergestellt, dass jedes Element auf dem Weg nach rechts in der richtigen Zelle im dritten Register abgelegt wird.

Als Markierungen werden ? und ! wie folgt eingesetzt:

- M1. Aus einem ? wird ein !, wenn es (mit einem Symbol) den linken Rand des Trägers erreicht, oder von einem Symbol von einem Abschnitt in den nächsten transportiert wird.
Die ! existieren also nur in den mittleren Registern.
- M2. Umgekehrt wird aus einem ! wieder ein ?, wenn ein Symbol mit ! eine Zelle erreicht hat, in der das dritte Register noch leer ist. Dann wird das Symbol im dritten Register abgelegt und das nachfolgende Symbol im zweiten Register bekommt die ? Markierung.

?a1	b1	c1	?a2	b2	c2	?a3	b3	c3	?a4	b4	c4	?a5	b5	c5	?a6	b6	c6
		?a2			?a3			?a4			?a5			?a6			
!a1																	
	?a2			?a3			?a4			?a5			?a6				
a1																	
?a2			?a3			?a4			?a5			?a6					
a1																	
		?a3			?a4			?a5			?a6						
!a2																	
a1																	
	?a3			?a4			?a5			?a6							
!a2																	
a1																	
?a3			?a4			?a5			?a6								
a1	a2																
		?a4			?a5			?a6									
!a3																	
a1	a2																
	?a4			?a5			?a6										
!a3																	
a1	a2																
?a4			?a5			?a6											
		!a3															
a1	a2																
		?a5			?a6												
!a4																	
a1	a2	a3															
	?a5			?a6													
	!a4																
a1	a2	a3															

	?a5			?a6																		
	!a4																					
a1	a2	a3																				
?a5				?a6																		
		!a4																				
a1	a2	a3																				
		?a6																				
!a5				!a4																		
a1	a2	a3																				
	?a6																					
	!a5																					
a1	a2	a3	a4																			
?a6																						
		!a5																				
a1	a2	a3	a4																			
	!a6			!a5																		
a1	a2	a3	a4																			
		!a6																				
a1	a2	a3	a4	a5																		
			!a6																			
a1	a2	a3	a4	a5																		
				!a6																		
a1	a2	a3	a4	a5																		
					!a6																	
a1	a2	a3	a4	a5																		
a1	a2	a3	a4	a5	a6																	

?a1	b1	c1	?a2	b2	c2	?a3	b3	c3	?a4	b4	c4	?a5	b5	c5	?a6	b6	c6
b1		?a2	b2		?a3	b3		?a4	b4		?a5	b5		?a6	b6		
!a1																	
	?a2	b2		?a3	b3		?a4	b4		?a5	b5		?a6	b6			
?b1																	
a1																	
?a2	b2		?a3	b3		?a4	b4		?a5	b5		?a6	b6				
	?b1																
a1																	
b2		?a3	b3		?a4	b4		?a5	b5		?a6	b6					
!a2		?b1															
a1																	
	?a3	b3		?a4	b4		?a5	b5		?a6	b6						
b2	!a2		?b1														
a1																	
?a3	b3		?a4	b4		?a5	b5		?a6	b6							
	?b2		?b1														
a1	a2																
b3		?a4	b4		?a5	b5		?a6	b6								
!a3		?b2			?b1												
a1	a2																
	?a4	b4		?a5	b5		?a6	b6									
b3	!a3		?b2			!b1											
a1	a2																
?a4	b4		?a5	b5		?a6	b6										
	b3	!a3		?b2													
a1	a2					b1											
b4		?a5	b5		?a6	b6											
!a4		?b3			?b2												
a1	a2	a3				b1											
	?a5	b5		?a6	b6												
b4	!a4		?b3			!b2											
a1	a2	a3				b1											

	?a5	b5		?a6	b6														
b4	!a4		?b3			!b2													
a1	a2	a3				b1													
?a5	b5		?a6	b6															
	b4	!a4	?b3			!b2													
a1	a2	a3				b1													
b5		?a6	b6																
!a5		b4	!a4		?b3														
a1	a2	a3				b1	b2												
	?a6	b6																	
b5	!a5		?b4			!b3													
a1	a2	a3	a4			b1	b2												
?a6	b6																		
	b5	!a5	?b4			!b3													
a1	a2	a3	a4			b1	b2												
b6																			
!a6		b5	!a5		?b4			!b3											
a1	a2	a3	a4			b1	b2												
b6	!a6		b5	!a5		!b4													
a1	a2	a3	a4			b1	b2	b3											
	b6	!a6		?b5		!b4													
a1	a2	a3	a4	a5		b1	b2	b3											
			b6	!a6		!b5		!b4											
a1	a2	a3	a4	a5		b1	b2	b3	b4										
					?b6			!b5											
a1	a2	a3	a4	a5	a6	b1	b2	b3	b4										

c5	?a6	b6	c6																
b5	!a5	c4	?b4		c3	!b3		?c2			?c1								
a1	a2	a3	a4			b1	b2												
?a6	b6	c6																	
c5	b5	!a5	c4	?b4		c3	!b3		?c2			?c1							
a1	a2	a3	a4			b1	b2												
b6	c6																		
!a6	c5	b5	!a5	c4	?b4		c3	!b3		?c2									
a1	a2	a3	a4			b1	b2					c1							
c6																			
b6	!a6	c5	b5	!a5	c4	!b4		?c3			?c2								
a1	a2	a3	a4			b1	b2	b3				c1							
c6	b6	!a6	c5	?b5		c4	!b4		?c3			!c2							
a1	a2	a3	a4	a5		b1	b2	b3				c1							
	c6	b6	!a6	c5	?b5		c4	!b4		?c3		!c2							
a1	a2	a3	a4	a5		b1	b2	b3				c1							
		c6	b6	!a6	c5	!b5		c4	!b4		?c3								
a1	a2	a3	a4	a5		b1	b2	b3				c1	c2						
			c6	b6	!a6	c5	!b5		?c4			!c3							
a1	a2	a3	a4	a5		b1	b2	b3	b4			c1	c2						
				c6	?b6		c5	!b5		?c4		!c3							
a1	a2	a3	a4	a5	a6	b1	b2	b3	b4			c1	c2						
					c6	!b6		c5	!b5		?c4		!c3						
a1	a2	a3	a4	a5	a6	b1	b2	b3	b4			c1	c2	c3					
							c6	!b6		?c5		!c4							
a1	a2	a3	a4	a5	a6	b1	b2	b3	b4	b5		c1	c2	c3					

a1	a2	a3	a4	a5	a6	b1	b2	b3	b4	b5		c1	c2	c3						
a1	a2	a3	a4	a5	a6	b1	b2	b3	b4	b5		c1	c2	c3						
a1	a2	a3	a4	a5	a6	b1	b2	b3	b4	b5		c1	c2	c3						
a1	a2	a3	a4	a5	a6	b1	b2	b3	b4	b5		c1	c2	c3	c4					
a1	a2	a3	a4	a5	a6	b1	b2	b3	b4	b5	b6	c1	c2	c3	c4					
a1	a2	a3	a4	a5	a6	b1	b2	b3	b4	b5	b6	c1	c2	c3	c4					
a1	a2	a3	a4	a5	a6	b1	b2	b3	b4	b5	b6	c1	c2	c3	c4	c5				
a1	a2	a3	a4	a5	a6	b1	b2	b3	b4	b5	b6	c1	c2	c3	c4	c5				
a1	a2	a3	a4	a5	a6	b1	b2	b3	b4	b5	b6	c1	c2	c3	c4	c5				
a1	a2	a3	a4	a5	a6	b1	b2	b3	b4	b5	b6	c1	c2	c3	c4	c5	c6			

Aufgabe 9.3

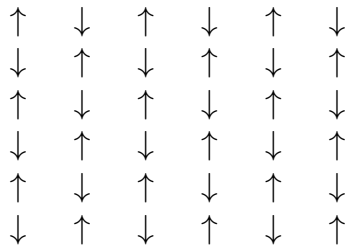
Formulieren Sie für zweidimensionale ZA ein „Analogon“ zum Odd-Even-Transposition-Sort. Welche Reihenfolge der Werte wird als Ergebnis geliefert? Ist das in irgendeinem Sinne sortiert?

Lösung 9.3

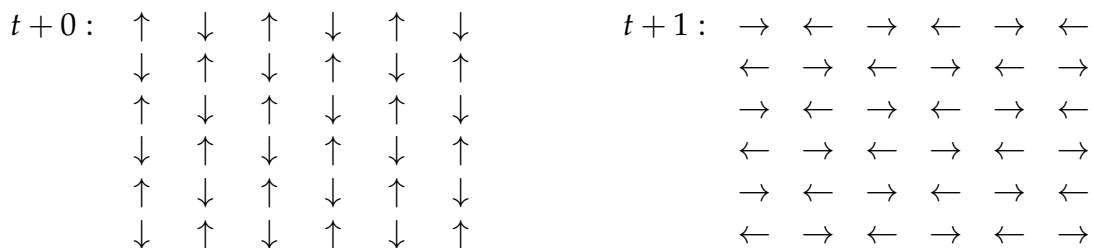
Grobe Idee:

- Jede Zelle schaut zyklisch in jede der vier Himmelsrichtungen.
- Durch geeignete Initialisierung sorgt man dafür, dass sich immer abwechselnd horizontale und vertikale Paare „ansehen“, und in jeder Dimension die Positionen der Paare immer um eine Stelle hin- und herrücken wie bei Odd-Even-Transposition-Sort.

Wählt man zum Beispiel die Reihenfolge $\uparrow \rightarrow \downarrow \leftarrow$, dann ist eine sinnvolle Initialisierung



Es ergeben sich dann der Reihe nach:



$t + 2 :$

↓	↑	↓	↑	↓	↑
↑	↓	↑	↓	↑	↓
↓	↑	↓	↑	↓	↑
↑	↓	↑	↓	↑	↓
↓	↑	↓	↑	↓	↑
↑	↓	↑	↓	↑	↓

$t + 3 :$

←	→	←	→	←	→
→	←	→	←	→	←
←	→	←	→	←	→
→	←	→	←	→	←
←	→	←	→	←	→
→	←	→	←	→	←

Sortierreihenfolge in den Zeilen bzw. Spalten?