Algorithmen in Zellularautomaten

9. Sortieren in zweidimensionalen ZA

Thomas Worsch

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Sommersemester 2020

Ziele

Problemstellung: Sortieren von Quadraten mit $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ Werten

Ziele

Problemstellung: Sortieren von Quadraten mit $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ Werten

- Was ist ein sortiertes Quadrat?
- Algorithmus Shearsort – in Zeit $\Theta(\sqrt{n} \log n)$
- Algorithmus von Schnorr und Shamir – in Zeit $\Theta(\sqrt{n})$

Überblick

- Problemdefinition
- Shearsort
- Algorithmus von Schnorr und Shamir

Was ist zweidimensionales Sortieren?

Was ist zweidimensionales Sortieren?

So:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

?

oder so:

1	2	6	7	15
3	5	8	14	16
4	9	13	17	22
10	12	18	21	23
11	19	20	24	25

?

oder so:

1	2	3	4	5
16	17	18	19	6
15	24	25	20	7
14	23	22	21	8
13	12	11	10	9

?

oder so:

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16
21	22	23	24	25

?

Problemstellung

- A endlich und total geordnet.
- **Gesucht:** zweidimensionaler Zellularautomat, der jedes Muster $e : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_m \to A$ in das sortierte Muster $s : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_m \to A$ überführt, wobei gilt:
  1. Für alle $a \in A$ ist $N_a(e) = N_a(s)$.
  2. Falls $i \in \mathbb{N}_m$ ungerade, gilt für $j \in \mathbb{N}_{m-1}$: $s(i, j) \leq s(i, j + 1)$.
  3. Falls $i \in \mathbb{N}_m$ gerade, gilt für $j \in \mathbb{N}_{m-1}$: $s(i, j) \geq s(i, j + 1)$.
  4. Falls $i \in \mathbb{N}_{m-1}$ ungerade, gilt $s(i, n) \leq s(i + 1, n)$.
  5. Falls $i \in \mathbb{N}_{m-1}$ gerade, gilt $s(i, 1) \leq s(i + 1, 1)$.
- Das ist «Sortieren in Schlangenlinienform».

Ideen?

Wie könnte man in Schlangenlinienform sortieren?

Überblick

- Problemdefinition
- Shearsort
- Algorithmus von Schnorr und Shamir

Algorithmus (Shearsort)

$1 + 2\lceil \log \sqrt{n} \rceil$ Phasen:

Algorithmus (Shearsort)

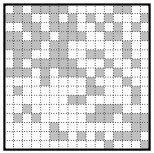
$1 + 2\lceil \log \sqrt{n} \rceil$ Phasen:

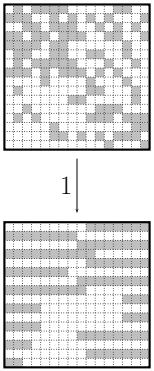
ungerade Phasen: jede *Zeile* für sich sortieren, und zwar

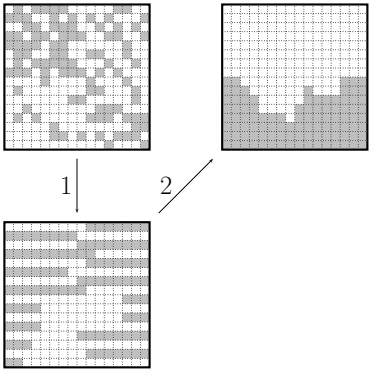
- ungerade Zeilen nach rechts aufsteigend und
- gerade Zeilen nach links aufsteigend.

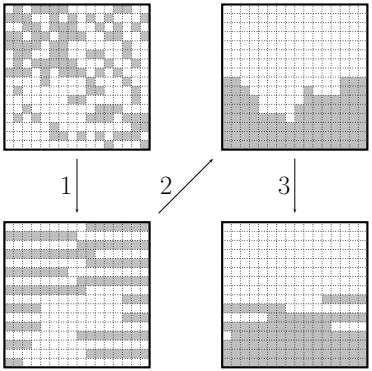
gerade Phasen: jede *Spalte* für sich sortieren, und zwar

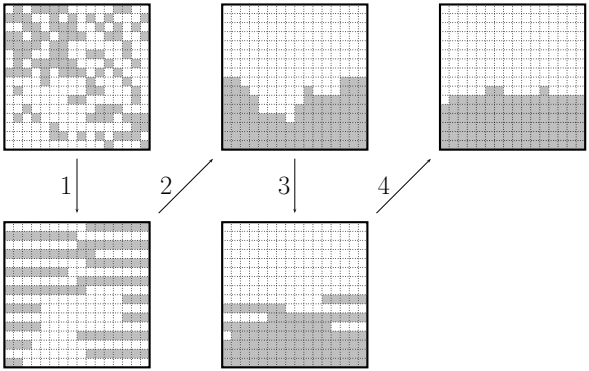
- kleine Werte nach oben.

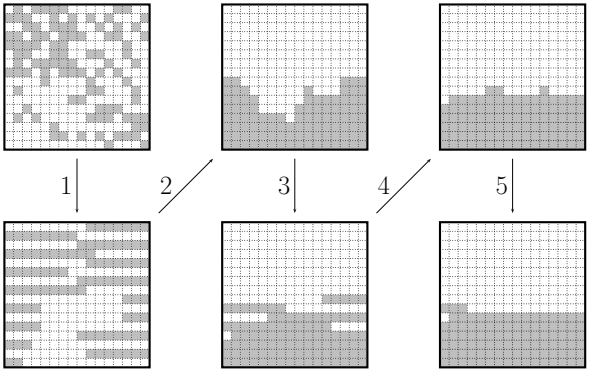


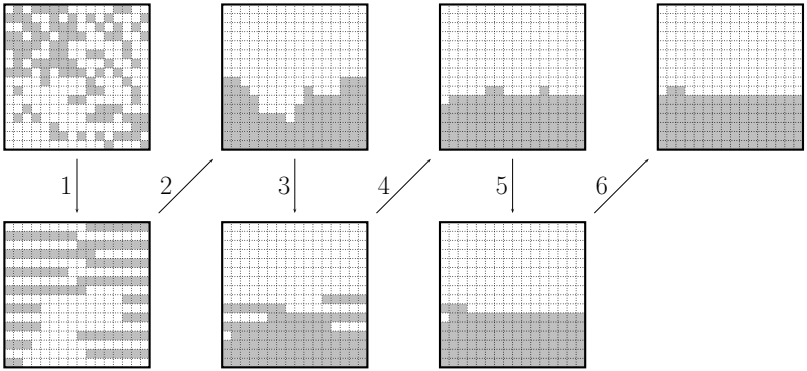

1

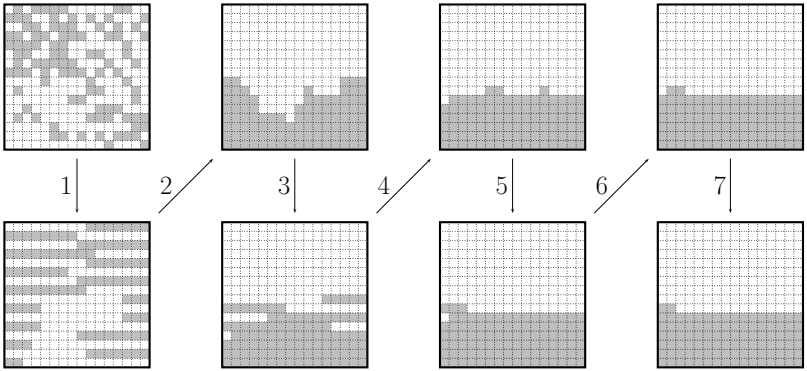

1
2


1
2
3


1
2
3
4


1
2
3
4
5


1
2
3
4
5
6



nach vorne

Shearsort

Lemma

- Algorithmus Shearsort leistet das Gewünschte und
- benötigt $\Theta(\sqrt{n} \log n)$ Schritte.

Shearsort

Lemma

- Algorithmus Shearsort leistet das Gewünschte und
- benötigt $\Theta(\sqrt{n}\log n)$ Schritte.

- gleich:
  Korrektheit ist *nicht* selbstverständlich

Beweis

- Das 0-1-Sortierlemma ist anwendbar.
- Konfiguration nach gerader Anzahl von Phasen:

zur Erinnerung klicke man hier

Beweis

- Das 0-1-Sortierlemma ist anwendbar.
- Konfiguration nach gerader Anzahl von Phasen:
  - ganz oben einige *reine* 0-Zeilen
  - dann einige *gemischte* Zeilen
  - ganz unten einige *reine* 1-Zeilen
- Zeige:

zur Erinnerung klicke man hier

Beweis

- Das 0-1-Sortierlemma ist anwendbar.
- Konfiguration nach gerader Anzahl von Phasen:
  - ganz oben einige *reine* 0-Zeilen
  - dann einige *gemischte* Zeilen
  - ganz unten einige *reine* 1-Zeilen
- Zeige:
  Durch zwei aufeinanderfolgende Phasen wird
  die Anzahl gemischter Zeilen mindestens halbiert.

zur Erinnerung klicke man hier

Korrektheit von Shearsort (1)

- betrachte zwei aufeinanderfolgende Zeilen;
  nach Zeilensortierphase so (oder gespiegelt):
- $$\begin{array}{c|c|c} 0\cdots01\cdots11\cdots1 & 0\cdots01\cdots1 & 0\cdots00\cdots01\cdots1 \\ 1\cdots11\cdots10\cdots0 & 1\cdots10\cdots0 & 1\cdots10\cdots00\cdots0 \end{array}$$

Korrektheit von Shearsort (1)

- betrachte zwei aufeinanderfolgende Zeilen;
  nach Zeilensortierphase so (oder gespiegelt):

$0\cdots01\cdots11\cdots1$	$0\cdots01\cdots1$	$0\cdots00\cdots01\cdots1$
$1\cdots11\cdots10\cdots0$	$1\cdots10\cdots0$	$1\cdots10\cdots00\cdots0$

- Anschließend erfolgt eine Spaltensortierung
  man kann sich vorstellen: erst paarweises Sortieren

$0\cdots01\cdots10\cdots0$	$0\cdots00\cdots0$	$0\cdots00\cdots00\cdots0$
$1\cdots11\cdots11\cdots1$	$1\cdots11\cdots1$	$1\cdots10\cdots01\cdots1$

- Anzahl x gemischter Zeilen sinkt um $\geq \frac{x-1}{2}$.

Korrektheit von Shearsort (2)

- anfangs maximal $\sqrt{n}$ gemischte Zeilen.

Korrektheit von Shearsort (2)

- anfangs maximal $\sqrt{n}$ gemischte Zeilen.
- nach $\lceil \log \sqrt{n} \rceil$ Zeilen- und Spaltenphasen
  - höchstens eine gemischte Zeile übrig,
  - die in der letzten Zeilenphase sortiert wird.
- Jede Phase kann in $\Theta(\sqrt{n})$ Schritten erledigt werden.
- Insgesamt Zeitbedarf also $\Theta(\sqrt{n} \log \sqrt{n}) = \Theta(\sqrt{n} \log n)$.

Ist die Korrektheit von Shearsort nicht trivial?

Ist die Korrektheit von Shearsort nicht trivial?

Nein! **Nein!** **Nein!** **Nein!** **Nein!** **Nein!**

Ist die Korrektheit von Shearsort nicht trivial?

Nein! **Nein!** **Nein!** **Nein!** **Nein!** **Nein!**

- Ändere Shearsort so ab, dass
  in allen Zeilen in die gleiche Richtung aufsteigend sortiert wird.
- Was passiert (nicht)?

Ist die Korrektheit von Shearsort nicht trivial?

Nein! **Nein!** **Nein!** **Nein!** **Nein!** **Nein!**

- Ändere Shearsort so ab, dass
  in allen Zeilen in die gleiche Richtung aufsteigend sortiert wird.
- Was passiert (nicht)?
- Man erhält *nicht* einen Algorithmus, der so sortiert, dass die Konkatenation aller Zeilen ein sortiertes Feld ergibt.
- Gegenbeispiel:

0	1
0	1

Überblick

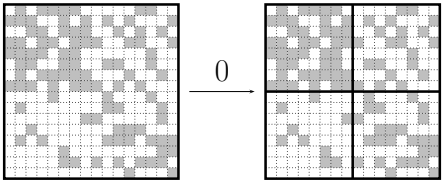
- Problemdefinition
- Shearsort
- Algorithmus von Schnorr und Shamir

Algorithmus (von Schnorr und Shamir)

- Anzahl der zu sortierenden Elemente: $n = k^8$
- quadratische Muster der Größe $m \times m = \sqrt{n} \times \sqrt{n} = k^4 \times k^4$
- Algorithmus in neun Phasen

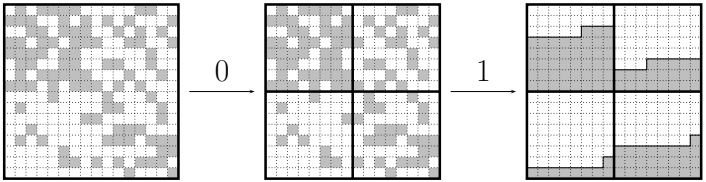
Phase 0

teile das Muster in
$k \times k$ *Blöcke* der Größe $k^3 \times k^3$ $\quad (k = \sqrt[4]{m} = \sqrt[8]{n})$



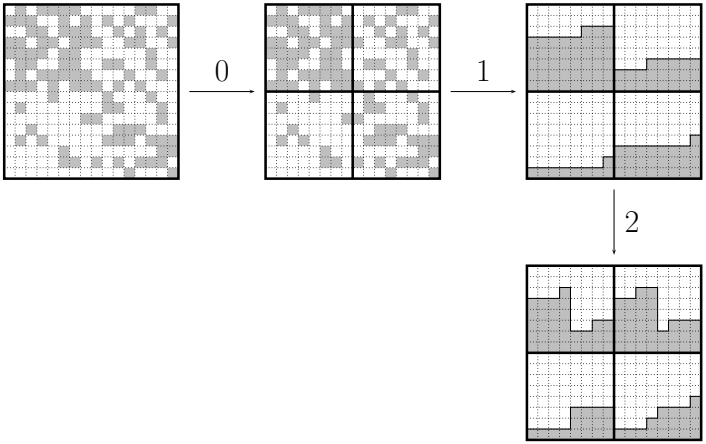
Phase 1

sortiere jeden Block in Schlangenlinienform



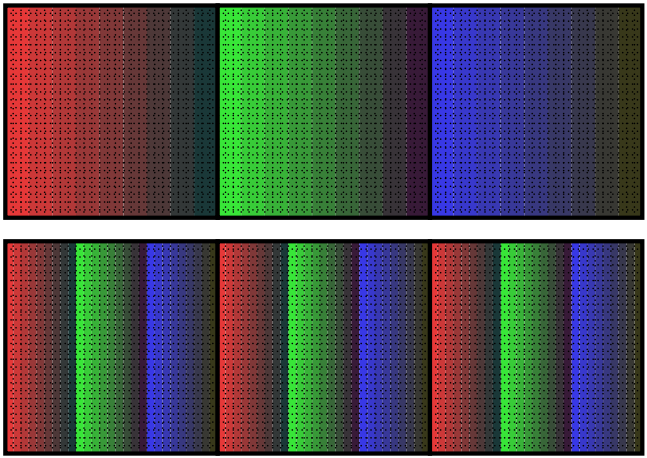
Phase 2

verteile die vollen Spalten jeder Spalte von Blöcken
gleichmäßig auf alle Spalten von Blöcken



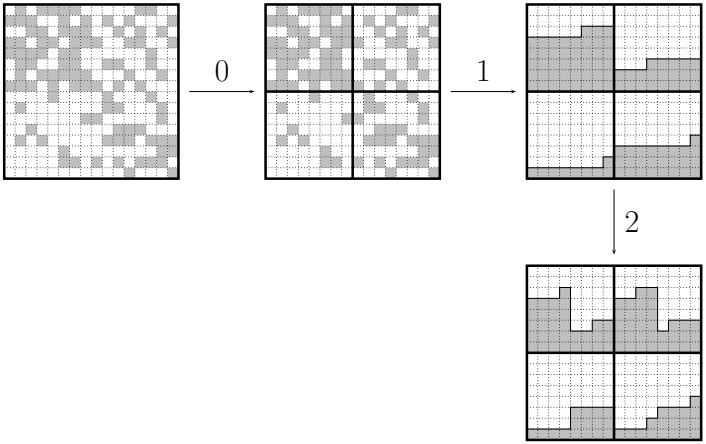
Spaltenumsortierung

für eine volle Zeile von Blöcken im Fall $k = 3$



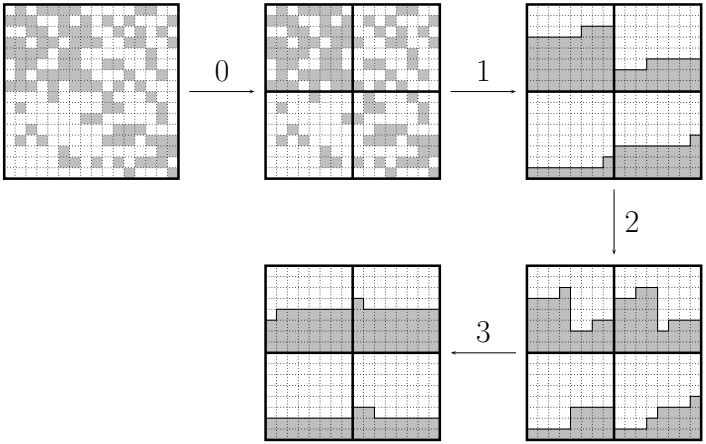
Phase 2

verteile die vollen Spalten jeder Spalte von Blöcken
gleichmäßig auf alle Spalten von Blöcken



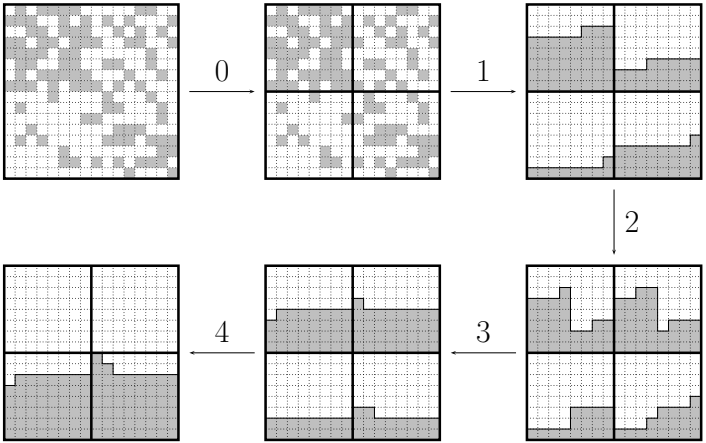
Phase 3

sortiere jeden Block in Schlangenlinienform.



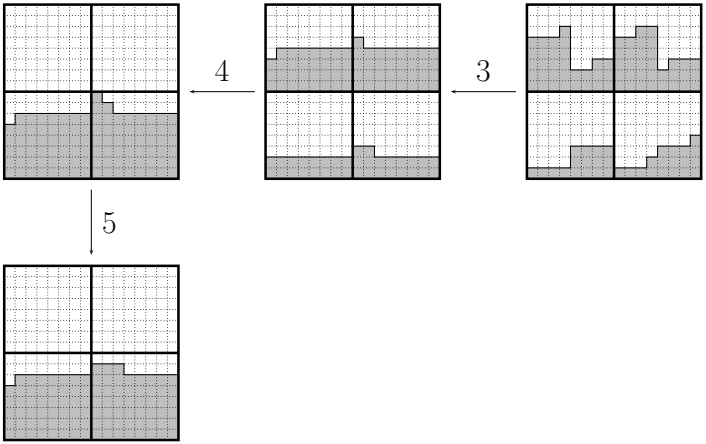
Phase 4

sortiere jede volle Spalte (kleine Werte nach oben)



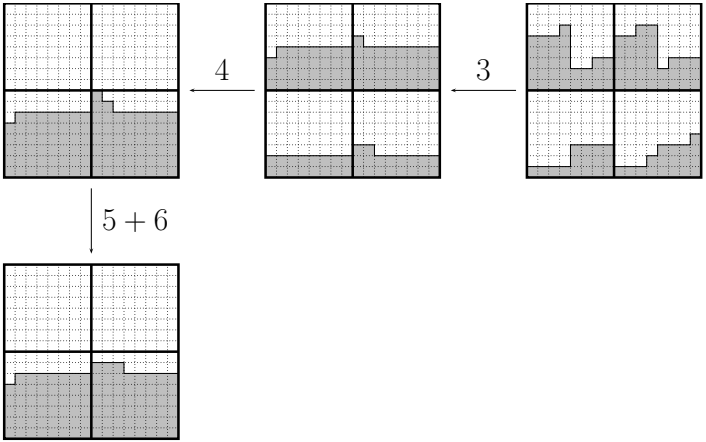
Phase 5

sortiere in jeder Spalte von Blöcken die Blöcke $1 + 2$, $3 + 4$, …
jeweils gemeinsam in Schlangenlinienform

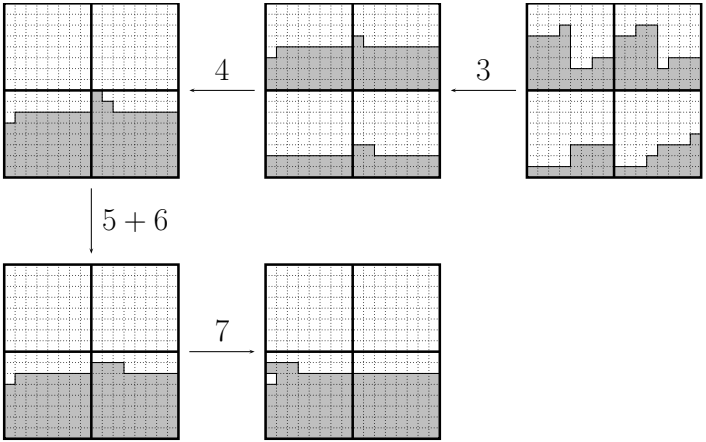


Phase 6

sortiere in jeder Spalte von Blöcken die Blöcke $2 + 3$, $4 + 5$, …
jeweils gemeinsam in Schlangenlinienform

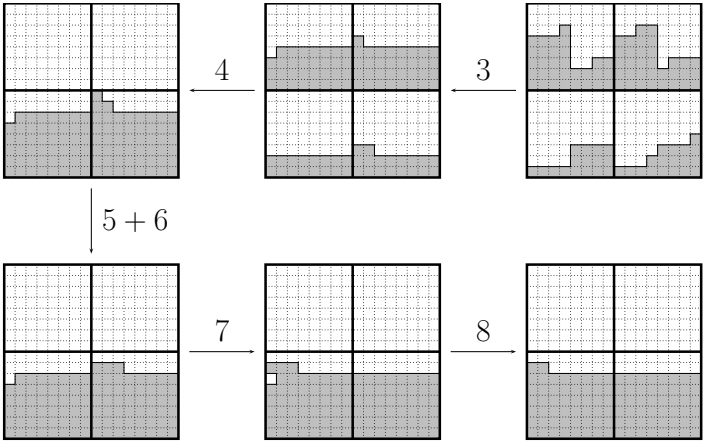


sortiere jede volle Zeile
(in ungeraden kleine Werte nach links, in geraden nach rechts)



Phase 8

führe auf der «gesamten Schlangenlinie»
$2k^3$ «Odd-Even-Transposition-Sort-Schritte» durch.



Korrektheit des Algorithmus von Schnorr und Shamir

Satz

- Der Algorithmus von Schnorr und Shamir sortiert quadratische $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$-Muster in $\Theta(\sqrt{n})$ Schritten.

- Hier sollte endgültig klar sein, wie nützlich Knuths 0-1-Sortierlemma ist!

Bewei(s)

Korrektheit: Das 0-1-Sortierlemma ist anwendbar.
Es gilt nach

Phase 1: In jedem Block gibt es höchstens eine gemischte Zeile, d.h. zwei Spalten des gleichen Blockes unterscheiden sich um höchstens eine 1.

Phase 2: Da jeder Block aus jedem anderen (der gleichen Zeile von Blöcken) mindestens eine Spalte bekommen hat, unterscheiden sich zwei Blöcke der gleichen Zeile von Blöcken in der Anzahl Einsen um höchstens k.

Phase 3: Da $k < k^3$ ist, gibt es in jeder Zeile von Blöcken höchstens zwei gemischte volle Zeilen.

Phase 4: In jeder Spalte von Blöcken gibt es höchstens k gemischte Zeilen.

Beweis (2)

Korrektheit:

Phasen 5+6: Jede Spalte von Blöcken in Schlangenlinienform.
Da in Phasen 3–6 kein Austausch zwischen verschiedenen Spalten von Blöcken, gilt wie schon nach Phase 2:
Je zwei ganze Spalten von Blöcken unterscheiden sich in der Anzahl Einsen um höchstens k^2.
Wegen $k^2 < k^3$ gibt es folglich nach Phase 6 insgesamt nur noch höchstens zwei gemischte volle Zeilen.

Beweis (3)

Korrektheit:

Phase 7: nur noch höchstens zwei gemischte volle Zeilen:
die eine enthält lauter Nullen und am «höheren» Ende höchstens $k^2 \cdot k = k^3$ Einsen, die andere lauter Einsen und am «niedrigeren» Ende höchstens $k^2 \cdot k = k^3$ Nullen.
Es bedarf also $\leq k^3 + k^3$ Sortierschritten entlang der großen Schlangenlinie um den Rest zu sortieren.
Daher gilt nach

Phase 8: Alles ist sortiert.

Beweis (4)

Zeitbedarf bei Verwendung von Shearsort für die Blöcke:

$$k^4 + k^3 \cdot \log k^3 + k^4 + k^3 \cdot \log k^3 + k^4 + k^3 \cdot \log k^3 + k^3 \cdot \log k^3 + k^4 + k^3 \in \Theta(\sqrt{n})$$

da $k^4 = \sqrt{n}$.

Implementierungsdetails

- Umschaltung zwischen Phasen: FSSP

- Übungsaufgabe:
  Umverteilung der vollen Spalten in Phase 2

  do it yourself:
  Wie geht das hinreichend schnell, i. e. in Zeit $O(k^4)$?

Lemma

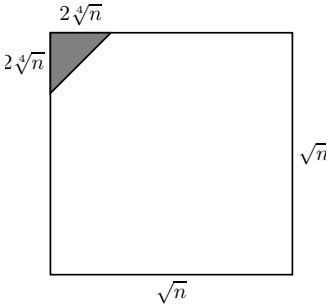
Lemma

Jeder Algorithmus für das zweidimensionale
Sortieren in Schlangenlinienform benötigt
mindestens $3\sqrt{n} - o(\sqrt{n})$ Schritte,
sofern man beliebig viele verschiedene Werte sortieren können will.

Beweis (1)

Betrachte folgende Aufteilung des Quadrates:

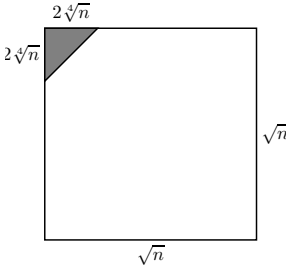
- graues Dreieck in linker oberer Ecke mit Kathetenlänge $2\sqrt[4]{n}$; umfasst (diskret) $2\sqrt{n} + \sqrt[4]{n}$, also mehr als $2\sqrt{n}$ Zellen
- Jeder Weg von einer grauen Zelle zur unteren rechten Ecke hat Länge $\geq 2\sqrt{n} - 2\sqrt[4]{n}$ (H_1^1-Nachbarschaft)
- der Rest umfasst $n - 2\sqrt{n} - \sqrt[4]{n}$ Zellen



Beweis (2)

Betrachte anfängliche Werteverteilung

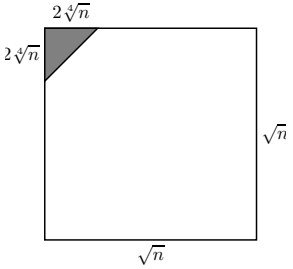
- im grauen Dreieck nur die Werte 0 und n
  welcher wie oft, überlegen wir uns später noch …
- im Rest jeder der Werte 1 bis $n - 2\sqrt{n} - \sqrt[4]{n}$ genau einmal
- Wert x: nach $2\sqrt{n} - 2\sqrt[4]{n} - 3$ Schritten im rechten unteren Eck
- Wo stand x am Anfang?



Beweis (2)

Betrachte anfängliche Werteverteilung

- im grauen Dreieck nur die Werte 0 und n
  welcher wie oft, überlegen wir uns später noch …
- im Rest jeder der Werte 1 bis $n - 2\sqrt{n} - \sqrt[4]{n}$ genau einmal
- Wert x: nach $2\sqrt{n} - 2\sqrt[4]{n} - 3$ Schritten im rechten unteren Eck
- Wo stand x am Anfang? im Weißen, nicht nahe dem Grauen



Beweis (3)

- Es sei $C(m)$ die Nummer der Spalte,
  in der sich x *am Ende der Sortierung* befinden wird, wenn
  im grauen Dreieck zu Beginn genau m mal der Wert n vorkommt.
- Erhöhung von m bewirkt
  Änderung der Spaltennummer um 1 da $0 < x < n$. (Richtung?!)
- Dreiecksgröße ist $2\sqrt{n}$, also gibt es ein m', so dass $C(m') = 1$.
- Für diese Wanderung werden noch weitere $\sqrt{n} - 1$ Schritte benötigt.

Zusammenfassung

- In eindimensionalen Zellularautomaten kann man n Datenelemente in Zeit $O(n)$ sortieren.
- Im Zweidimensionalen ist die Schlangenlinie eine sinnvolle Sortierreihenfolge, weil in der Sortierung benachbarte Datenelemente am Ende auch in benachbarten Zellen liegen sollen.
- Sortieren von $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$ Elementen in Schlangenlinienform ist in Zeit $O(\sqrt{n})$ möglich.
- Dabei ist $3\sqrt{n} - o(\sqrt{n})$ untere Zeitschranke, sofern man beliebig viele verschiedene Werte sortieren können will.
- Do it yourself:
  Unterbiete die Schranke, wenn nur Bits zu sortieren sind!