Algorithmen in Zellularautomaten
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 7.1

Machen Sie sich Gedanken zum eindimensionalen FSSP mit zwei Generälen:

1. Präzisieren Sie die Problemstellung.
2. Was ist die Optimalzeit?
3. Überlegen Sie sich einen möglichst schnellen Algorithmus.

Lösung 7.1

1. Anfangskonfigurationen enthalten *genau zwei* Zellen im Zustand g
2. Es sei k_l die Anzahl der Zellen im Zustand s links vom linken General und analog k_r die Anzahl der Zellen im Zustand s rechts vom rechten General. Zwischen den beiden Generälen seien k_m Zellen.

   Insgesamt sind also $n = k_l + 1 + k_m + 1 + k_r$ Zellen zu synchronisieren.

   Es sei $m = \max(k_l, k_r)$. Dann dauert es $m + n - 1$ Schritte bis zum ersten Mal die weiter von einem General entfernte Randzelle ein Signal vom anderen Rand erhalten haben kann.

   Das ist jedenfalls eine untere Schranke … und wie man in Teil 3 sieht, gibt es tatsächlich Algorithmen, die so schnell sind.
3. Idee: Es sei M die Zelle in der Mitte zwischen den beiden Generälen. Man sorgt dafür, dass sich der ZA im wesentlichen so verhält wie der für nur einen General an der Stelle M ab dem Zeitpunkt, da jener $(k_r - M)/2$ Schritte gemacht hat; siehe Abbildung 7.1.

Aufgabe 7.2

Machen Sie sich Gedanken zum eindimensionalen FSSP mit beliebig vielen Generälen:

1. Präzisieren Sie die Problemstellung.
2. Was ist die Optimalzeit?
3. Überlegen Sie sich einen möglichst schnellen Algorithmus.

Lösung 7.2

1. In der Anfangskonfiguration gibt es eine beliebige positive Anzahl von Zellen im Zustand g; links und rechts von jedem eine beliebige Zahl von Zellen im Zustand s.

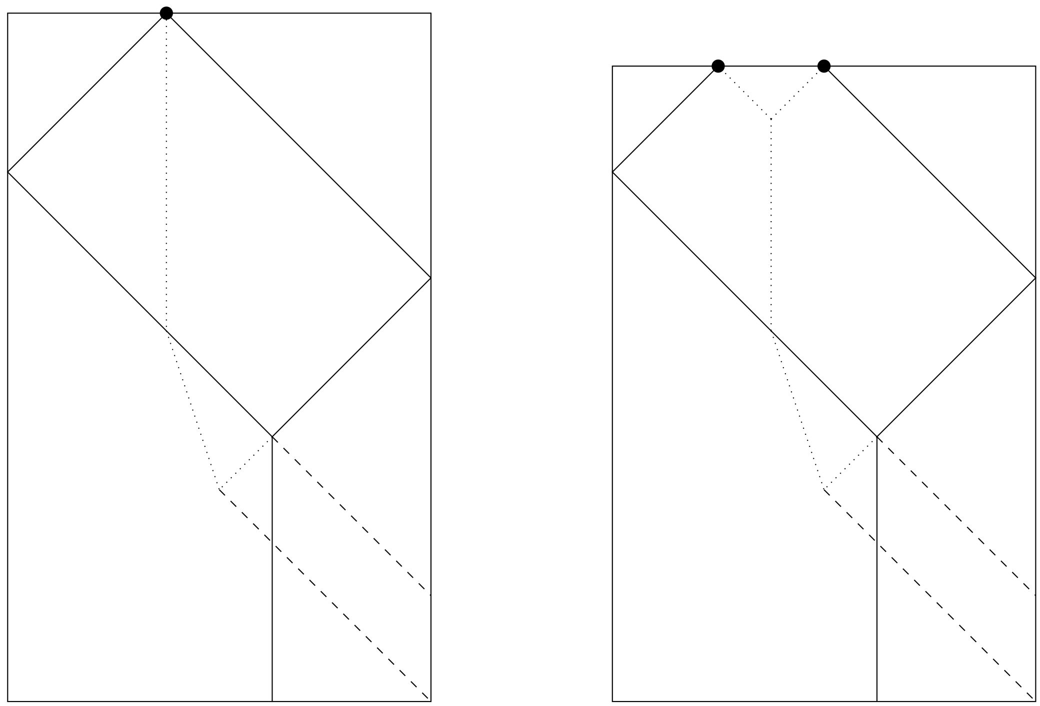

Abbildung 7.1: Synchronisation mit einem General (links) und mit zwei Generälen (rechts).

2. Mit dem „üblichen“ Argument, dass jeder Rand „etwas vom anderen Rand wissen muss“ ergibt sich, dass für eine untere Schranke nur die Position k_l des am weitesten links und die Position des am weitesten rechts positionierten Generals k_r Zellen vom rechten Rand relevant sind.

   Untere Schranke wie in Aufgabe 7.1: $\max(k_l, k_r) + n - 1$ Schritte. Und das kann man erreichen.

3.

Aufgabe 7.3
In dieser Aufgabe geht es um das FSSP in d-dimensionalen Quadern mit einem General in einer Ecke (Ihrer Wahl).

1. Was ist die Optimalzeit für diese Problemvariante?
2. Überlegen Sie sich einen Algorithmus für diese Problemvariante.
3. Wie schnell ist Ihr Algorithmus?

Lösung 7.3

1.

Aufgabe 7.4
In dieser Aufgabe geht es um das FSSP in d-dimensionalen (Hyper-)Würfeln mit einem General in einer Ecke (Ihrer Wahl).

1. Was ist die Optimalzeit für diese Problemvariante?
2. Überlegen Sie sich einen Algorithmus für diese Problemvariante.
3. Wie schnell ist Ihr Algorithmus?

Lösung 7.4

Aufgabe 7.5
In dieser Aufgabe geht es um das FSSP in d-dimensionalen Quadern mit einem General an einer beliebigen Stelle.

1. Was ist die Optimalzeit für diese Problemvariante?
2. Überlegen Sie sich einen Algorithmus für diese Problemvariante.
3. Wie schnell ist Ihr Algorithmus?

Aufgabe 7.6
In dieser Aufgabe geht es um das FSSP in d-dimensionalen (Hyper-)Würfeln mit einem General an einer beliebigen Stelle.

1. Was ist die Optimalzeit für diese Problemvariante?
2. Überlegen Sie sich einen Algorithmus für diese Problemvariante.
3. Wie schnell ist Ihr Algorithmus?