4 Selbstreproduktion

Ein Aspekt dessen, wonach John von Neumann ursprünglich suchte, als er Zellularautomaten einführte, war die *Fähigkeit zur Selbstreproduktion*. Darunter wollen wir vorläufig informell verstehen, dass ausgehend von einer (endlichen) Musterkonfiguration c_m ein Zellularautomat nach endlich vielen Schritten eine Konfiguration erzeugt, in der m mehrfach vorkommt.

4.1 Beispiel. Selbstreproduktion in diesem Sinne ist in einem Zellularautomaten trivial zu realisieren: Man nehme $Q = \{0, 1\}$ mit Ruhezustand 0, $N = \{0, 1\}$ und setze für alle $x \in Q$: $\delta(x, 1) = \delta(1, x) = 1$. Beginnend mit einer Konfiguration, die nur das (eindeutig bestimmte) Muster $m : \{0\} \to \{1\}$ enthält, wird dieses in jedem Schritt „reproduziert".

Diese Banalität war es natürlich nicht, die von Neumann vor Augen hatte. Auf seine Vorstellung kommen wir in Abschnitt 4.2 zurück. Zunächst aber wollen wir selbst überlegen, wie man die Aufgabe anspruchsvoller machen könnte.

4.1 Reproduktion beliebiger endlicher Muster

Die Dimension des Zellularautomaten zu erhöhen, ist offensichtlich kein Problem. Weiter könnte man zum Beispiel verlangen, dass *jede(!)* endliche Konfiguration reproduziert wird. Im ersten Moment fällt es schwer, sich vorzustellen, wie das realisiert werden könnte; zumindest dann, wenn man „Verschiebetechniken" im Kopf hat. Verblüffenderweise ist aber auch diese Aufgabe erstaunlich einfach zu lösen.

4.2 Beispiel. Man betrachte den zweidimensionalen Zellularautomaten mit $Q = \mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $N = H_1^{(2)}$ und der lokalen Überführungsfunktion, die als Funktionswert die Summe (modulo 5) aller 5 Zustände in der Nachbarschaft liefert.

Experimente führen sehr schnell zu den Vermutungen, dass

1. dieser Zellularautomat jede endliche Anfangskonfiguration nach hinreichend vielen Schritten reproduziert und dass

2. diese Eigenschaft nicht verloren geht, wenn man statt 5 eine beliebige Primzahl p wählt, und ebenso wenn man eine beliebige Dimensionalität und eine beliebige Nachbarschaft N zugrunde legt.

4.3 Lemma. Es seien eine Primzahl p, eine Dimension d und eine Nachbarschaft N beliebig gewählt. Für den Zellularautomaten C mit $R = \mathbb{Z}^d$, $Q = \mathbb{Z}_p$, $\delta(l) = \sum_{n \in N} l(n) \bmod p$ (und daher Ruhezustand 0) gibt es für jedes Muster m ein k_0, so dass für alle $k > k_0$ gilt: Nach $t = p^k$ Schritten erreicht C ausgehend von der Musterkonfiguration c_m jeweils eine Konfiguration, in der das Muster m genau $|N|$ mal vorkommt (und sonst keine weiteren Muster).

Eine noch allgemeinere Aussage findet sich (samt Verweisen auf frühere Arbeiten) bei Barto (1978).

Zur Vorbereitung des Beweises machen wir zunächst einen kurzen Ausflug in die Zahlentheorie:

4.4 Wir benötigen die *Polynomialkoeffizienten* $\binom{i_1+\cdots+i_n}{i_1;\cdots;i_n}$ (wobei alle $i_j \in \mathbb{N}_0$ seien), die wie folgt definiert werden können:

$$\binom{i_1+\cdots+i_n}{i_1;\cdots;i_n} = \frac{(i_1+\cdots+i_n)!}{i_1!\ \cdots\ i_n!}$$

Es gilt:

$$(x_1+\cdots+x_n)^t = \sum_{i_1+\cdots+i_n=t} \binom{t}{i_1;\cdots;i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n} \tag{4.1}$$

Andererseits kann man zum Beispiel durch Induktion über k zeigen, dass in den Polynomringen $\mathbb{Z}_p[x_1,\ldots,x_n]$ für alle $k \geqslant 0$ gilt:

$$(x_1+\cdots+x_n)^{p^k} = x_1^{p^k}+\cdots+x_n^{p^k}$$

Ein Vergleich mit Gleichung 4.1 zeigt, dass infolgedessen für den Fall $i_1+\cdots+i_n = p^k$ gilt:

$$\binom{p^k}{i_1;\cdots;i_n} \bmod p = \begin{cases} 1 & \text{falls für ein } j \text{ gilt: } i_j = p^k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \tag{4.2}$$

4.5 Für den in diesem Abschnitt interessierenden Fall $Q = \mathbb{Z}_m$ übertragen wir die auf der Zustandsmenge Q definierte Addition auf Konfigurationen und definieren: $c + c' : R \to Q : i \mapsto c(i) + c'(i)$. Im folgenden sind alle Additionen (und auch alle Polynomialkoeffizienten) modulo p zu verstehen. Außerdem sei für $q \in Q$ die Konfiguration qc definiert als $qc : R \to Q : i \mapsto qc(i)$.

4.6 Außerdem werden gleich die *Verschiebeoperatoren* $T_\nu : Q^R \to Q^R$ benötigt. Für $\nu \in R$ ist T_ν definiert vermöge der Festlegung, dass für alle $c : R \to Q$ gelte: $T_\nu(c) : R \to Q : i \mapsto c(i-\nu)$.

Man überlegt sich schnell, dass die Verschiebeoperatoren alle miteinander kommutieren (d. h. $T_\nu(T_u(c)) = T_u(T_\nu(c))$) und linear sind (d. h. $T_\nu(qc + q'c') = qT_\nu(c) + q'T_\nu(c')$).

4.7 Übung. Man beweise, dass die globale Überführungsfunktion Δ jedes ZA mit jedem Verschiebeoperator T_ν kommutiert; es gilt stets:

$$\Delta \circ T_\nu = T_\nu \circ \Delta\ .$$

4.8 Beweis (von Lemma 4.3) Es sei C ein den Voraussetzungen genügender Zellularautomat mit $N = \{n_1,\ldots,n_n\}$ und globaler Überführungsfunktion Δ, die durch $\delta(l) = \sum_{n\in N} l(n) \bmod p$ induziert wird.

Es ist leicht zu sehen, dass ein solches Δ eine lineare Abbildung ist. Außerdem kommutieren die Verschiebeoperatoren mit jeder globalen Überführungsfunktion (siehe oben), also insbesondere auch mit Δ.

Damit kann man nun nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\Delta(c) &= \sum_{n\in N} T_{-n}(c) \\
\Delta^2(c) &= \Delta\Big(\sum_{n\in N} T_{-n}(c)\Big) = \sum_{n\in N} \Delta(T_{-n}(c)) = \sum_{n\in N} T_{-n}(\Delta(c)) \\
&= \sum_{n\in N} T_{-n}\Big(\sum_{n'\in N} T_{-n'}(c)\Big) = \sum_{n\in N}\sum_{n'\in N} T_{-n}(T_{-n'}(c)) \\
&= \sum_{i_1+\cdots+i_n=2} \binom{2}{i_1;\cdots;i_n} T_{-n_1}^{i_1}\circ\cdots\circ T_{-n_n}^{i_n}(c)
\end{aligned}$$

und eine Induktion lehrt, dass allgemein gilt:

$$\Delta^t(c) \quad = \sum_{i_1+\cdots+i_n=t} \binom{t}{i_1;\cdots;i_n} T^{i_1}_{-n_1} \circ \cdots \circ T^{i_n}_{-n_n}(c) \; . \tag{4.3}$$

Im Fall $t = p^k$ ergibt sich unter Verwendung von 4.2 aus 4.3:

$$\Delta^{p^k}(c) = \sum_{j=1}^{n} T^{p^k}_{-n_j}(c) \; .$$

Das heißt, für $t = p^k$ besteht $\Delta^t(c)$ aus n “Kopien” $T^{p^k}_{-n_j}(c)$ des Anfangsmusters und die Kopien liegen mindestens p^k Zellen auseinander. Wählt man k hinreichend groß, nämlich so, dass p^k „größer also der Durchmesser“ des Anfangsmusters ist, dann wird dieses so weit verschoben, dass die Kopien in disjunkten Bereichen zu liegen kommen und man sie auch nach der Addition noch als Kopien erkennt. ∎

4.9 Übung. Man beweise, dass jedes durch ein δ der Form $\delta(l) = \sum_{n \in N} l(n) \bmod p$ induziert Δ tatsächlich eine lineare Abbildung ist.

4.10 Beispiel. Als einfaches Beispiel betrachte man den Fall $R = \mathbb{Z}$, $Q = \mathbb{Z}_2$, und $N = H_1^{(1)} = \{-1, 0, 1\}$. Das Raum-Zeit-Diagramm für eine willkürliche Anfangskonfiguration sieht dann zum Beispiel so aus, wenn man eine 0 als weißen Fleck darstellt und eine 1 als #:

```
 0:                                     ## # ###
 1:                                    #   #  # #
 2:                                   ### ##### ##
 3:                                  # #   ###    #
 4:                                 ## ## # # #  ###
 5:                                #      # # ### # #
 6:                               ###    ## #  #  # ##
 7:                              # # #  #   #######   #
 8:                             ## # ##### # ##### # ###
 9:                            #   #  ###  #  ###  #  # #
10:                           ### #### # ##### # ###### ##
11:                          # #   ##  #  ###  #  ####    #
12:                         ## ## #  ##### # ##### ## #  ###
13:                        #      ### ###  #  ###     ### # #
14:                       ###    # #   # ##### # #   # #  # ##
15:                      # # #  ## ## ##  ###  # ## ## ####   #
16:                     ## # ###        ## # ###        ## # ###
17:                    #   #  # #      #   #  # #      #   #  # #
18:                   ### ##### ##    ### ##### ##    ### ##### ##
19:                  # #   ###    #  # #   ###    #  # #   ###    #
20:                 ## ## # # #  ##### ## # # #  ##### ## # # #  ###
21:                #      # # ### ###     # # ### ###     # # ### # #
22:               ###    ## #  #   # #   ## #  #   # #   ## #  #  # ##
23:              # # #  #   ##### ## ## #   ##### ## ## #   #######   #
24:             ## # ##### # ###        ## # ###        ## # ##### # ###
25:            #   #  ###  #  # #      #   #  # #      #   #  ###  #  # #
26:           ### #### # ###### ##    ### ##### ##    ### #### # ###### ##
27:          # #   ##  #  ####    #  # #   ###    #  # #   ##  #  ####    #
28:         ## ## #  ##### ## #  ##### ## # # #  ##### ## #  ##### ## #  ###
29:        #      ### ###     ### ###     # # ### ###     ### ###     ### # #
30:       ###    # #   # #   # #   # #   ## #  #   # #   # #   # #   # #  # ##
31:      # # #  ## ## ## ## ## ## ## ## #   ##### ## ## ## ## ## ## ## ####   #
32:     ## # ###                        ## # ###                        ## # ###
33:    #   #  # #                      #   #  # #                      #   #  # #
34:   ### ##### ##                    ### ##### ##                    ### ##### ##
35:  # #   ###    #                  # #   ###    #                  # #   ###    #
36: ## ## # # #  ###                ## ## # # #  ###                ## ## # # #  ###
```

Wie man sieht, sind in den Konfigurationen zu den Zeitpunkten $t = 2^k > 7$ stets gerade $|N| = 3$ Kopien des anfangs vorgegebenen Musters vorhanden.

Wer mehr über die Zellularautomaten und Binomial- und Multinomialkoeffizienten wissen will, konsultiere zum Beispiel Kapitel sieben in dem Buch von Peitgen, Jürgens und Saupe 1994.

4.2 Konstruktionsuniversalität

Wenden wir uns nun den Ideen von Neumanns zu.

4.11 (Lebenslauf) John von Neumann wurde am 28. Dezember 1903 in Budapest geboren und starb am 8. Februar 1957. Er wurde 1927 Privatdozent an der Universität Berlin und ging 1930 nach Princeton, wo er 1931 Professor wurde. 1933 wechselte er an das Institute for Advanced Study, an dem er bis zu seinem Tod arbeitete.

Das Buch von Neumann 1966 wurde nach seinem Tode von Burks herausgegeben. Es enthält die ergänzten und korrigierten Fassungen der hinterlassenen schriftlichen Unterlagen von Neumanns. Die folgenden, durch breite horizontale Linien begrenzten Auszüge sind (Ausschnitte) gescante(r) Seiten des Buches.

Theory of
Self-Reproducing Automata

JOHN VON NEUMANN

***edited and completed by* Arthur W. Burks**

University of Illinois Press
URBANA AND LONDON 1966

4.12 Von Neumann formulierte die folgenden Fragen (Neumann 1966, Seite 92):

> *1.1.2.1 The main questions:* (*A*)–(*E*). Within the above limitations, however, we will deal with problems that are rather central—at least for the initial phases of the subject. We will investigate automata under two important, and connected, aspects: those of logics and of construction. We can organize our considerations under the headings of five main questions:
>
> (A) Logical universality. When is a class of automata logically universal, i.e., able to perform all those logical operations that are at all performable with finite (but arbitrarily extensive) means? Also, with what additional—variable, but in the essential respects standard—attachments is a single automaton logically universal?
>
> (B) Constructibility. Can an automaton be constructed, i.e., assembled and built from appropriately defined "raw materials," by another automaton? Or, starting from the other end and extending the question, what class of automata can be constructed by one, suitably given, automaton? The variable, but essentially standard, attachments to the latter, in the sense of the second question of (A), may here be permitted.
>
> (C) Construction-universality. Making the second question of (B) more specific, can any one, suitably given, automaton be construction-universal, i.e., be able to construct in the sense of question (B) (with suitable, but essentially standard, attachments) every other automaton?
>
> (D) Self-reproduction. Narrowing question (C), can any automaton construct other automata that are exactly like it? Can it be made, in addition, to perform further tasks, e.g., also construct certain other, prescribed automata?
>
> (E) Evolution. Combining questions (C) and (D), can the construction of automata by automata progress from simpler types to increasingly complicated types? Also, assuming some suitable definition of "efficiency," can this evolution go from less efficient to more efficient automata?

(A) war bereits durch die Arbeit von Turing 1936 positiv beantwortet worden.

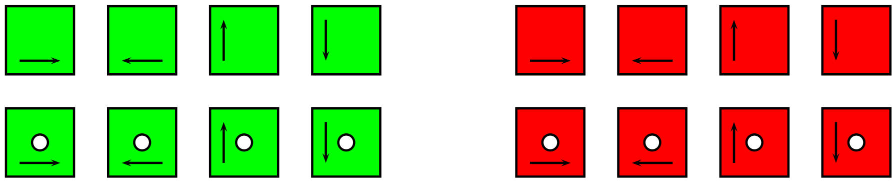
Mit (E) hat sich von Neumann bis zu seinem Tod nur wenig beschäftigt.

Hinsichtlich der Fragen in (B)–(D) betrachtete von Neumann zunächst ein kinematisches Modell (mit „Fühler"-, „Muskel"-, „Löt"-, „Schneide"- und anderen Elementen) bevor er auf Vorschlag von Stanislaw Ulam etwa 1949/50 begann, sich mit dem zu beschäftigen, was man heute Zellularautomaten nennt. Letzlich hat von Neumann alle Fragen durch die Angabe eines Zellularautomaten mit 29 Zuständen und geeigneten Anfangskonfigurationen positiv beantworten können. (Wobei man erwähnen sollte, dass die von von Neumann angegebenen Konstruktionen noch Fehler in den Details enthielten.)

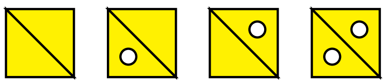
4.13 Die genaue Überführungsfunktion und einfache Beispielkonfigurationsfolgen entnehme man dem zweiten Kapitel von Neumann 1966, insbesondere Abschnitt 2.8. Die Ideen sind zum Teil der von `WIREWORLD` ähnlich – entstanden aber eben viiiel früher und sind deutlich weitergehend.

Von Neumann verwendet die von Neumann-Nachbarschaft $H_1^{(2)}$ und vier Sorten von Zuständen:

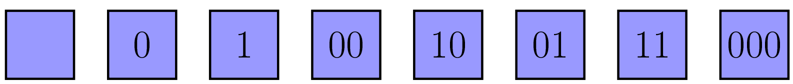
- Die meisten von ihnen dienen im wesentlichen dazu, gerichtete „Drähte" zu kennzeichnen. Ein Draht kann „frei" sein ($\epsilon = 0$), oder ein „Elektron beherbergen" ($\epsilon = 1$), das im nächsten Schritt (unter Umständen) von der in der „Ausgangsrichtung“ des Drahtes ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) liegenden Nachbarzelle „übernommen“ wird. Diese Zustände sind in doppelter Ausführung vorhanden ($u = 0, 1$), daher insgesamt 16 Stück $\mathbf{T}_{u\alpha\epsilon}$.



- Vier Zustände $\mathbf{C}_{\epsilon\epsilon'}$ dienen als Weichen, Undgatter und Verzögerungsglieder.



- **U** ist Ruhezustand.
- Die acht Zustände $\mathbf{S}_\theta$, $\mathbf{S}_0$, $\mathbf{S}_1$, …, $\mathbf{S}_{000}$ werden für die „Erzeugung“ neuer Drähte, etc. verwendet.



Auf den Seiten 148 und 149 findet man die folgenden Zusammenfassung:

2.8 Summary

2.8.1 Rigorous description of the states and of the transition rule. We can now give a rigorous summary, i.e., a complete list of states and an exhaustive transition rule.

Let us write $\mathbf{T}_u$, $u = 0, 1$, in place of $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}'$, respectively. Correspondingly, let us call the ordinary stimuli and the special stimuli *stimuli [0]* and *stimuli [1]*, respectively.

The enumeration of states becomes this:

(S) The *states:*

The states are the following ones:

The *transmission states* $\mathbf{T}_{u\alpha\epsilon}$, where $u = 0, 1$ correspond to *ordinary* and *special;* $\alpha = 0, 1, 2, 3$ to *right, up, left, down;* $\epsilon = 0, 1$ to *quiescent* and *excited.*

The *confluent states* $\mathbf{C}_{\epsilon\epsilon'}$, where $\epsilon = 0, 1$ correspond to *quiescent* and *excited;* $\epsilon' = 0, 1$ to *next quiescent* and *next excited.*

The *unexcitable state* **U**.

The *sensitized states* $\mathbf{S}_\Sigma$—where Σ has the range

(S.1) $\Sigma = \theta, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000.$

In addition, the $\mathbf{S}_\Sigma$ with

(S.2) $\Sigma = 0000, 0001, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111,$

in this order, are identified with

(S.3) $\mathbf{T}_{u\alpha 0}$ $(u = 0, 1; \alpha = 0, 1, 2, 3)$ and $\mathbf{C}_{00}$

in the order $\mathbf{T}_{000}$, $\mathbf{T}_{010}$, $\mathbf{T}_{020}$, $\mathbf{T}_{030}$, $\mathbf{T}_{100}$, $\mathbf{T}_{110}$, $\mathbf{T}_{120}$, $\mathbf{T}_{130}$, $\mathbf{C}_{00}$. This is a total of 16 (transmission) + 4 (confluent) + 1 (unexcitable) + 8 (sensitized) = 29 states. Hence

(24) $N = 29,$

and the symbols $\mathbf{T}_{u\alpha\epsilon}$ $(u = 0, 1; \alpha = 0, 1, 2, 3; \epsilon = 0, 1)$, $\mathbf{C}_{\epsilon\epsilon'}$ $(\epsilon = 0, 1; \epsilon' = 0, 1)$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{S}_\Sigma$ $\{\Sigma$ according to (S.1)$\}$ will be used in place of the 29 number values in expression (6) (cf. the remark after expressions (6) and (7) in Sec. 2.1.2).

Die Überführungsfunktion fasst von Neumann wie folgt zusammen, wobei jeweils $n_\vartheta{}^t$ für den Zustand einer Zelle $\vartheta = (i, j)$ zum Zeitpunkt t steht und die „relativen Nachbarn" einer Zelle mit $\nu^0 = (1, 0)$, $\nu^1 = (0, 1)$, $\nu^2 = -\nu^0 = (-1, 0)$ und $\nu^3 = -\nu^1 = (0, -1)$ bezeichnet werden.

Let us now consider the transition rule. First, note that the number of possibilities for this rule (i.e., for the function $\mathbf{F}$ in the sense of Sec. 2.1.2) is, according to expression (9) with $N = 29$,

(25) $29^{(29^5)} \approx 10^{30,000,000}$

(with three significant figures in the exponent). Second, the rules (10)–(16) and (21)–(23) constitute together the transition rule, and they can be summarized as follows.

(T) *The transition rule:*

(T.1) $\left\{\begin{array}{l}
\text{Assume } n_\vartheta{}^{t-1} = \mathbf{T}_{u\alpha\epsilon}. \\
\quad (\alpha)\ n_\vartheta{}^t = \mathbf{U} \text{ if and only if } n_{\vartheta'}^{t-1} = \mathbf{T}_{u'\alpha'1}, \\
\qquad \text{for some } \vartheta' \text{ with } \vartheta - \vartheta' = v^{\alpha'}, \text{ and also } u \neq u'. \\
\quad (\beta)\ n_\vartheta{}^t = \mathbf{T}_{u\alpha 1} \text{ if and only if } (\alpha) \text{ does not hold} \\
\qquad \text{and either (a) or (b) holds:} \\
\qquad\quad \text{(a) } n_{\vartheta'}^{t-1} = \mathbf{T}_{u\alpha'1} \text{ for some } \vartheta' \text{ with} \\
\qquad\qquad \vartheta - \vartheta' = v^{\alpha'} \neq -v^{\alpha}. \\
\qquad\quad \text{(b) } n_{\vartheta'}^{t-1} = \mathbf{C}_{1\epsilon'} \text{ for some } \vartheta' \text{ with} \\
\qquad\qquad \vartheta - \vartheta' = v^{\beta} \neq -v^{\alpha} (\beta = 0, \cdots, 3). \\
\quad (\gamma)\ n_\vartheta{}^t = \mathbf{T}_{u\alpha 0} \text{ if and only if neither } (\alpha) \text{ nor } (\beta) \\
\qquad \text{holds.}
\end{array}\right.$

$$
\text{(T.2)}\quad
\begin{cases}
\text{Assume } n_\vartheta^{t-1} = \mathbf{C}_{\epsilon\epsilon'}\,. \\
\quad (\alpha)\ n_\vartheta{}^t = \mathbf{U} \quad \text{if and only if} \quad n_{\vartheta'}^{t-1} = \mathbf{T}_{1\alpha'1}\,, \\
\qquad \text{for some } \vartheta' \text{ with } \vartheta - \vartheta' = v^{\alpha'}. \\
\quad (\beta)\ n_\vartheta{}^t = \mathbf{C}_{\epsilon'1} \text{ if and only if } (\alpha) \text{ does not hold} \\
\qquad \text{and both (a) and (b) hold:} \\
\qquad\quad \text{(a) } n_{\vartheta'}^{t-1} = \mathbf{T}_{0\alpha'1} \quad \text{for some } \vartheta \text{ with} \\
\qquad\qquad \vartheta - \vartheta' = v^{\alpha'}. \\
\qquad\quad \text{(b) Never } n_{\vartheta'}^{t-1} = \mathbf{T}_{0\alpha'0} \quad \text{for an } \vartheta' \text{ with} \\
\qquad\qquad \vartheta - \vartheta' = v^{\alpha'}. \\
\quad (\gamma)\ n_\vartheta{}^t = \mathbf{C}_{\epsilon'0} \text{ if and only if neither } (\alpha) \text{ nor } (\beta) \\
\qquad \text{holds.}
\end{cases}
$$

$$
\text{(T.3)}\quad
\begin{cases}
\text{Assume } n_\vartheta^{t-1} = \mathbf{U}. \\
\quad (\alpha)\ n_\vartheta{}^t = \mathbf{S}_\theta \quad \text{if and only if} \quad n_{\vartheta'}^{t-1} = \mathbf{T}_{u\alpha'1}\,, \\
\qquad \text{for some } \vartheta' \text{ with } \vartheta - \vartheta' = v^{\alpha'}. \\
\quad (\beta)\ n_\vartheta{}^t = \mathbf{U} \text{ if and only if } (\alpha) \text{ does not hold.}
\end{cases}
$$

$$
\text{(T.4)}\quad
\begin{cases}
\text{Assume } n_\vartheta^{t-1} = \mathbf{S}_\Sigma \,\{\text{with } \boldsymbol{\Sigma} \text{ according to list (S.1)}\}. \\
\quad (\alpha)\ n_\vartheta{}^t = \mathbf{S}_{\Sigma 1} \quad \text{if and only if} \quad n_{\vartheta'}^{t-1} = \mathbf{T}_{u\alpha'1}\,, \\
\qquad \text{for some } \vartheta' \text{ with } \vartheta - \vartheta' = v^{\alpha'}. \\
\quad (\beta)\ n_\vartheta{}^t = \mathbf{S}_{\Sigma 0} \text{ if and only if } (\alpha) \text{ does not hold.}
\end{cases}
$$

2.8.2 Verbal summary. The rigorous summary of Section 2.8.1 is a strict restatement of the verbal formulations and conclusions arrived at in Sections 2.2–2.7. In this sense, a verbal statement of the strict and formalistic contents of Section 2.8.1 is available in those sections. However, it seems desirable to give at this point a verbal restatement of the contents of Section 2.8.1, i.e., of its descriptions of the states and of the transition rule. Indeed, the formalism of Section 2.8.1 is not easy to follow without the verbal motivations of Sections 2.2–2.7. On the other hand, the verbal elaborations of those sections are lengthy and were arrived at stepwise. A direct verbal restatement is therefore indicated.

Such a restatement, covering the states and the transition rule together, is given in what follows.

There exist 16 *transmission states* $\mathbf{T}_{u\alpha\epsilon}$. The index u indicates the *class* of the state: $u = 0$ for *ordinary* and $u = 1$ for *special*. The index α indicates the *orientation* of the state: $\alpha = 0$ for *right*, $\alpha = 1$ for *up*, $\alpha = 2$ for *left*, and $\alpha = 3$ for *down*. The index ϵ indicates the present state of *excitation:* $\epsilon = 0$ for *quiescent*, and $\epsilon = 1$ for *excited*. A transmission state has one *output* direction and three *input* directions: the former is the direction defined by its orientation; the latter are all the others. A transmission state can be excited with a *delay 1*, by any immediately neighboring excited transmission state of the same class, provided that the former lies in the output direction of the latter, which in turn must be lying in one of the former's input directions.

There exist four *confluent states* $\mathbf{C}_{\epsilon\epsilon'}$. The index ϵ indicates the present state of excitation, the index ϵ' indicates the next state of excitation: ϵ or $\epsilon' = 0$ for *quiescent*, and ϵ or $\epsilon' = 1$ for *excited*. The confluent states are viewed as being of class 0. For a confluent state, all directions are available both for inputs and for outputs. [But at any given time a direction cannot be used for both an input and an output.] A confluent state can be excited with a *delay 2* by those immediately neighboring transmission states of its own class (i.e., 0) in whose output direction it lies. The excitation will take place if there exists at least one such immediate neighbor, and if all such immediate neighbors (whatever their number) are excited.

A transmission state (of either class) can also be excited with a *delay 1* by any immediately neighboring excited confluent state, provided that the latter lies in one of the former's input directions.

There exists an unexcitable state **U**. This state is viewed as quiescent. Any transmission or confluent state is *killed* (i.e., transferred into the unexcitable state) by any immediately neighboring excited transmission state of the opposite class, provided that the former lies in the latter's output direction.

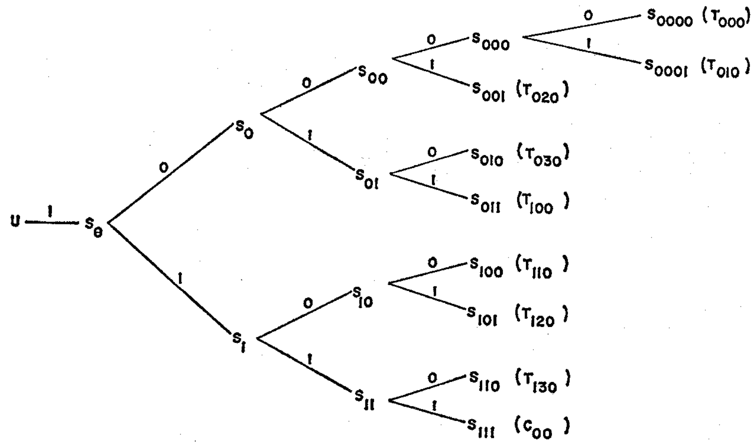
All the above states (transmission and confluent) go into their quiescent forms when no excitation or kill, according to the above rules, is provided for.

There exist eight *sensitized states* $\mathbf{S}_\Sigma$, with Σ according to list (S.1). We will also use the symbol $\mathbf{S}_\Sigma$ with Σ according to list (S.2), but these latter states are not considered to be sensitized ones. They are identified with the quiescent transmission and quiescent confluent states according to list (S.3). (For the references to lists (S.1)–(S.3), cf. Sec. 2.8.1.) A sensitized state $\mathbf{S}_\Sigma$ will in any case undergo a change (immediately, i.e., with a *delay 1*), namely into $\mathbf{S}_{\Sigma 0}$ or $\mathbf{S}_{\Sigma 1}$. The change into $\mathbf{S}_{\Sigma 1}$ will take place under the influence of any immediately neighboring excited transmission state (of either class), provided that the sensitized state lies in the output direction of the latter. Otherwise, a change into $\mathbf{S}_{\Sigma 0}$ will take place.

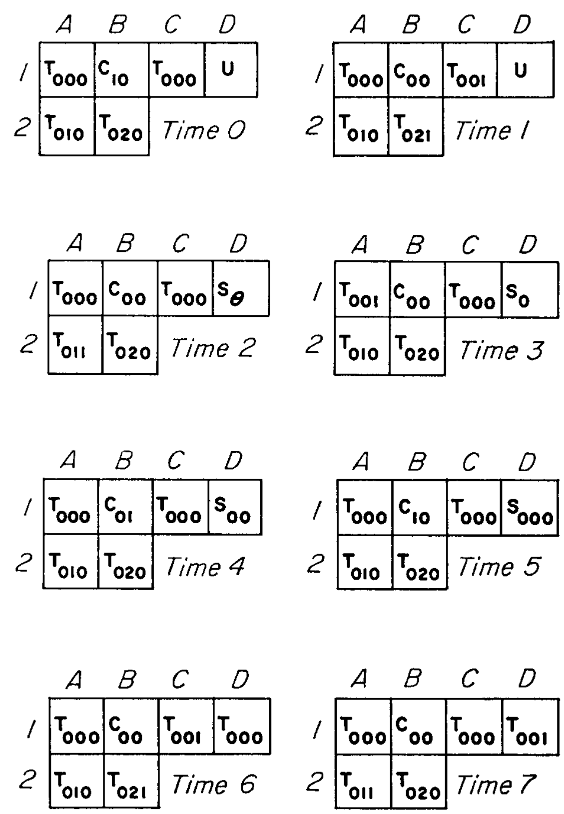
We re-emphasize that this last mentioned rule applies only as long as the state is sensitized, i.e., as long as Σ is according to list (S.1), and not according to list (S.2) (i.e., as long as it has not reached a maximum size).

In Tabellenform wird die Überführungsfunktion auf den Seiten 312 und 313 dargestellt:

Class	Name	Symbol	Number	Summary of transition rule
	Unexcitable	**U**	1	Direct process changes **U** into sensitized states and then into $\mathbf{T}_{u\alpha 0}$ or C_{00}. Reverse process kills $\mathbf{T}_{u\alpha\epsilon}$ or $\mathbf{C}_{\epsilon\epsilon'}$ into **U**.
Ordinary	Confluent	$\mathbf{C}_{\epsilon\epsilon'}$: $\begin{cases}\epsilon = 0 \text{ (quiescent)}\\ \epsilon = 1 \text{ (excited)}\end{cases}$ $\begin{cases}\epsilon' = 0 \text{ (next quiescent)}\\ \epsilon' = 1 \text{ (next excited)}\end{cases}$	4	Receives conjunctively from $\mathbf{T}_{0\alpha\epsilon}$ directed toward it; emits with double delay to all $\mathbf{T}_{u\alpha\epsilon}$ not directed toward it. Killed to **U** by $\mathbf{T}_{1\alpha 1}$ directed toward it; killing dominates reception.
Ordinary	Transmission ($\mathbf{T}_{u\alpha\epsilon}$)	$\mathbf{T}_{0\alpha\epsilon}$: $\overset{0}{\rightarrow}$, $\uparrow 0$, $\overset{0}{\leftarrow}$, $\downarrow 0$ *Class:* $u = 0$ (ordinary), $u = 1$ (special) *Excitation:* $\epsilon = 0$ (quiescent), $\epsilon = 1$ (excited) *Output direction:* $\alpha = 0$ (right), $\alpha = 1$ (up), $\alpha = 2$ (left), $\alpha = 3$ (down)	8	Receives disjunctively from $\mathbf{T}_{0\alpha\epsilon}$ directed toward it and from $\mathbf{C}_{\epsilon\epsilon'}$; emits in output direction with single delay (a) to $\mathbf{T}_{0\alpha\epsilon}$ not directed toward it and to $\mathbf{C}_{\epsilon\epsilon'}$ (b) to **U** or sensitized states by direct process (c) to kill $\mathbf{T}_{1\alpha\epsilon}$ by reverse process. Killed to **U** by $\mathbf{T}_{1\alpha 1}$ directed toward it; killing dominates reception.
Special	Transmission ($\mathbf{T}_{u\alpha\epsilon}$)	$\mathbf{T}_{1\alpha\epsilon}$: $\overset{1}{\rightarrow}$, $\uparrow 1$, $\overset{1}{\leftarrow}$, $\downarrow 1$	8	Receives disjunctively from $\mathbf{T}_{1\alpha\epsilon}$ directed toward it and from $\mathbf{C}_{\epsilon\epsilon'}$; emits in output direction with single delay (a) to $\mathbf{T}_{1\alpha\epsilon}$ not directed toward it (b) to **U** or sensitized states by direct process (c) to kill $\mathbf{T}_{0\alpha\epsilon}$ or $\mathbf{C}_{\epsilon\epsilon'}$ by by reverse process. Killed to **U** by $\mathbf{T}_{0\alpha 1}$ directed toward it; killing dominates reception.
	Sensitized	S_{000}, S_{00}, S_0, S_{01}, S_θ, S_{10}, S_1, S_{11}	8	These are intermediary states in the direct process. $\mathbf{T}_{u\alpha 1}$ directed toward **U** converts it to S_θ. Thereafter, S_Σ is followed by (a) $\mathrm{S}_{\Sigma 1}$ if some $\mathbf{T}_{u\alpha 1}$ is directed toward the cell (b) $\mathrm{S}_{\Sigma 0}$ otherwise, until the direct process terminates in a $\mathbf{T}_{u\alpha 0}$ or $\mathbf{C}_{00}$. See Figure 10.



Zwei einfache Beispiele (Seiten 315/317) demonstrieren die wesentliche Eigenschaft des von Neumannschen Zellularautomaten, endliche Konfigurationen „auszudehnen“ bzw. zu ändern:



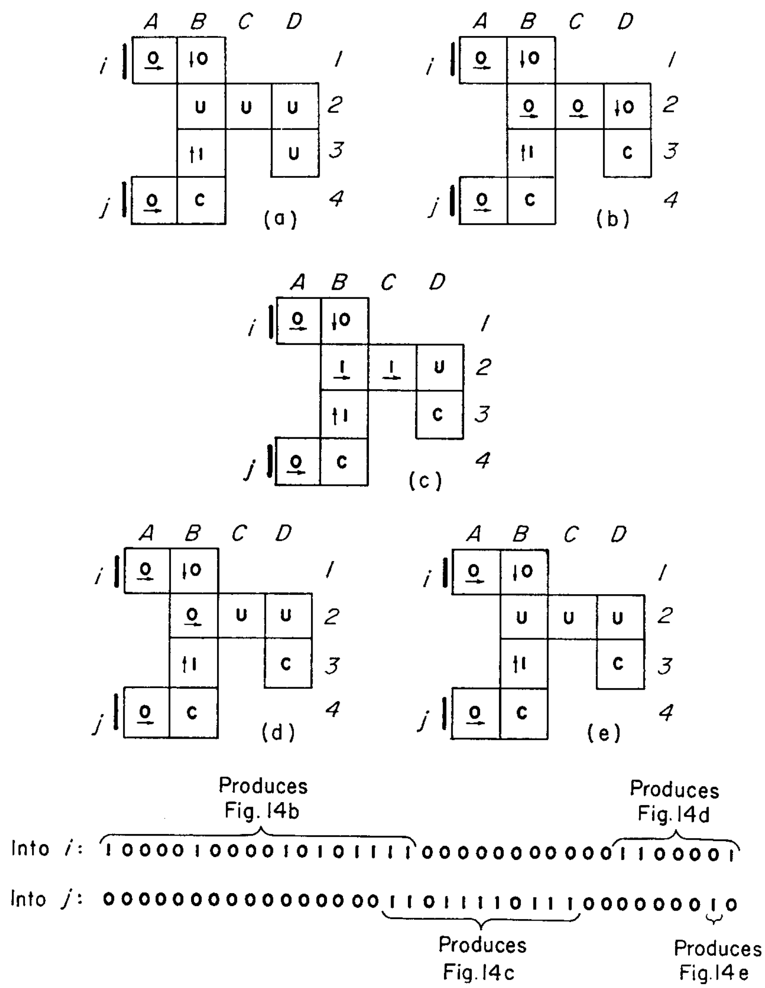
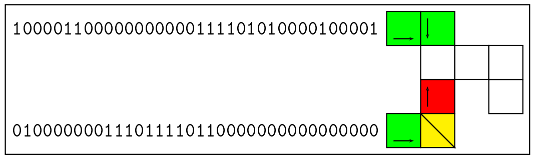


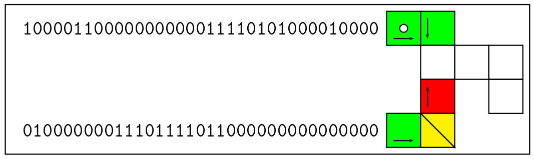
Fig. 14. Procedure for modifying a remote cell and returning the constructing path to its original unexcitable state

Auf den folgenden vier Seiten ist die zeitliche Entwicklung für das zweite Beispiel dargestellt. Der besseren Anschaulichkeit wegen wurden die „Eingabebits“ in umgekehrter Reihenfolge dargestellt.

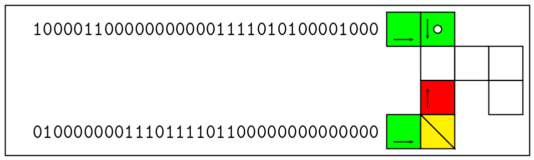
$t = 0$:



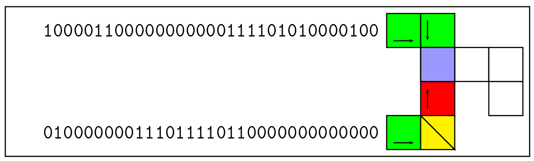
$t = 1$:



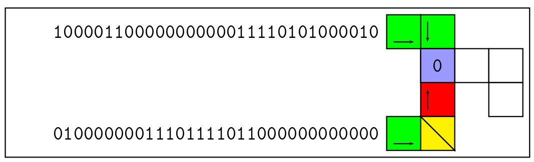
$t = 2$:



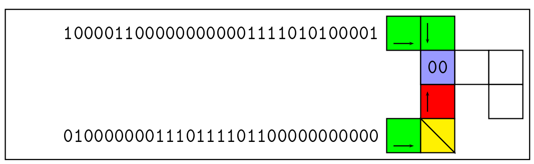
$t = 3$:



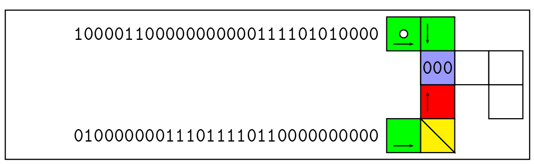
$t = 4$:



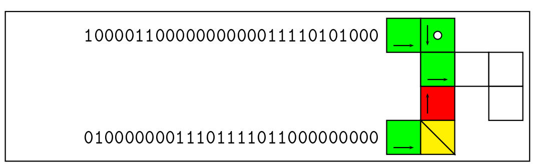
$t = 5$:



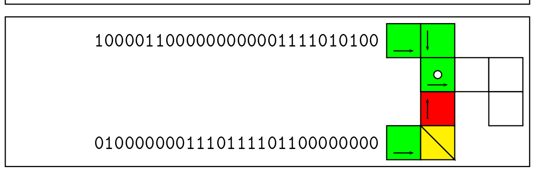
$t = 6$:



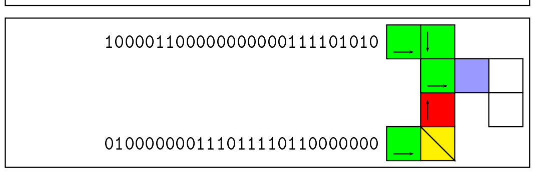
$t = 7$:



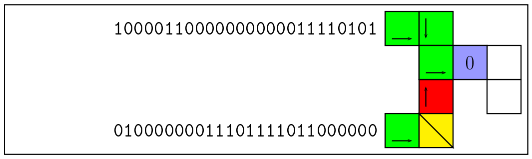
$t = 8$:



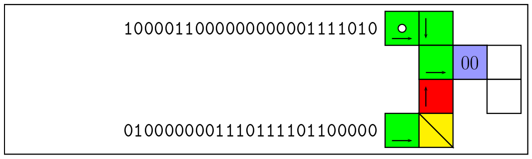
$t = 9$:



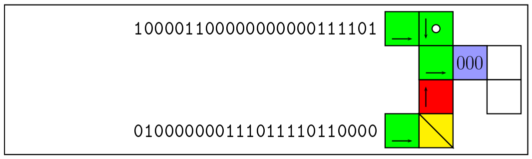
t = 10:



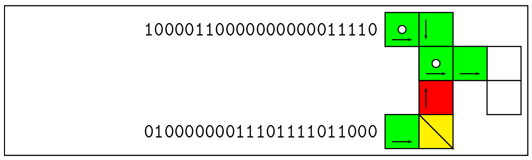
t = 11:



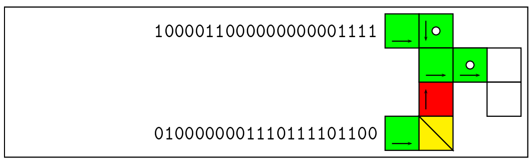
t = 12:



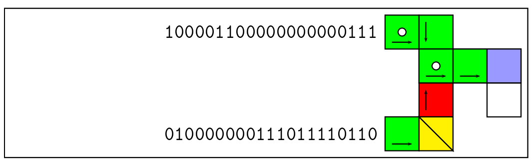
t = 13:



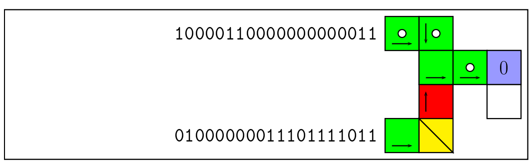
t = 14:



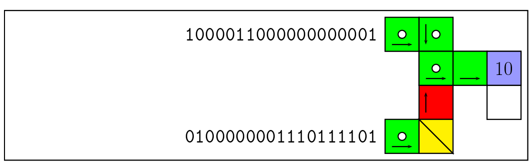
t = 15:



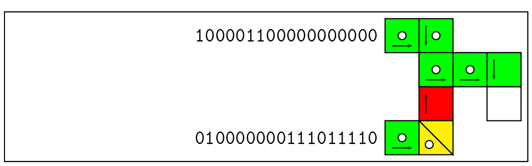
t = 16:



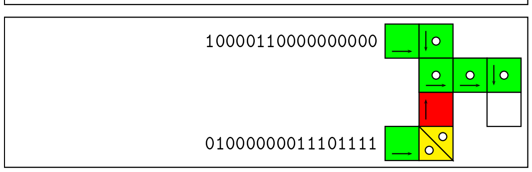
t = 17:



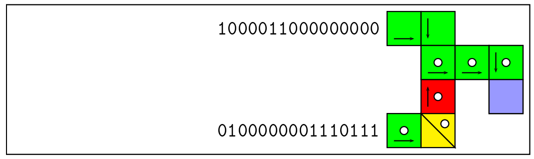
t = 18:



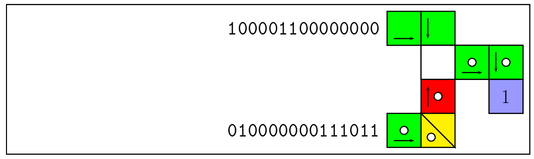
t = 19:



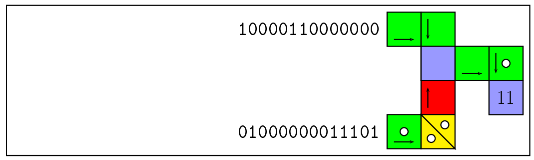
$t = 20$:



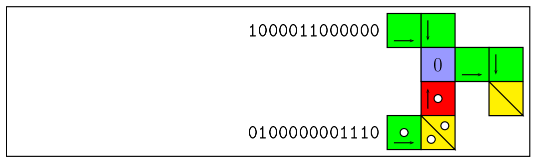
$t = 21$:



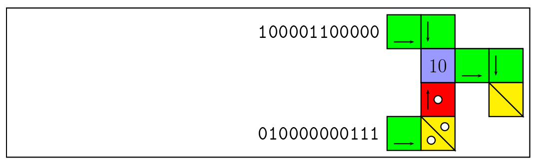
$t = 22$:



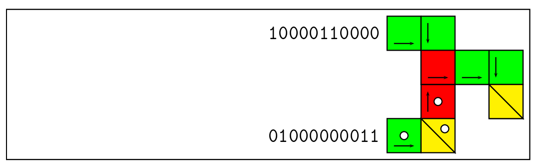
$t = 23$:



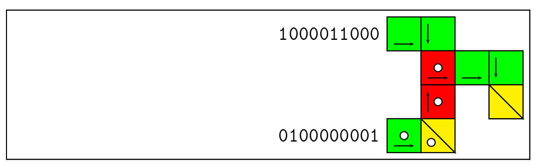
$t = 24$:



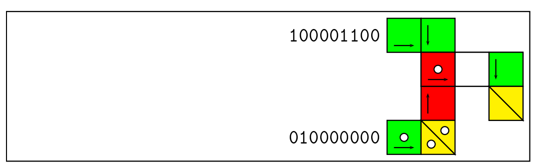
$t = 25$:



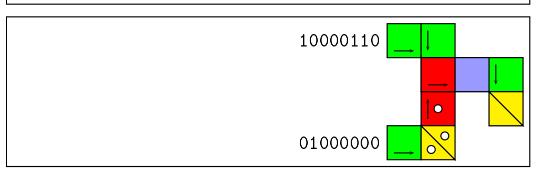
$t = 26$:



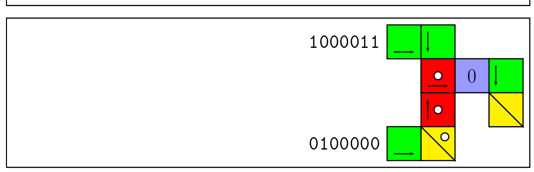
$t = 27$:



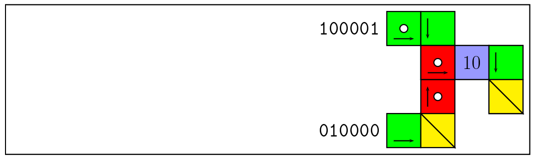
$t = 28$:



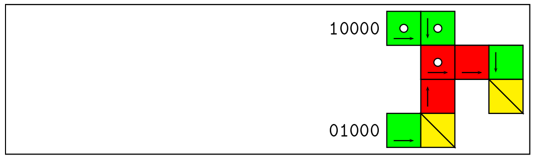
$t = 29$:



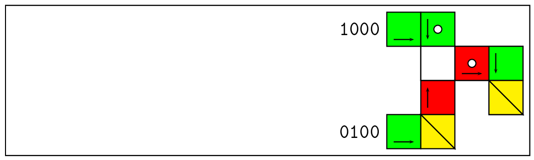
$t = 30$:



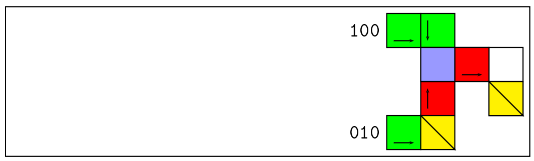
$t = 31$:



$t = 32$:

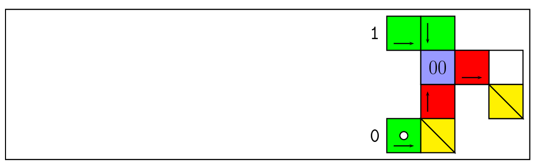


$t = 33$:

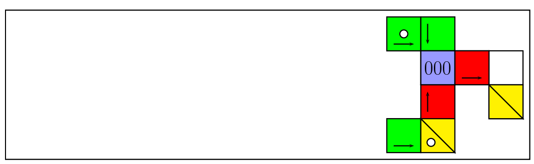


$t = 34$:

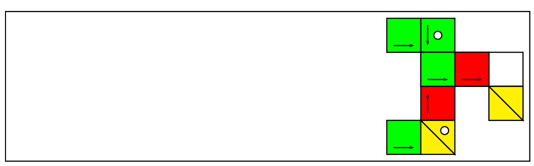
$t = 35$:



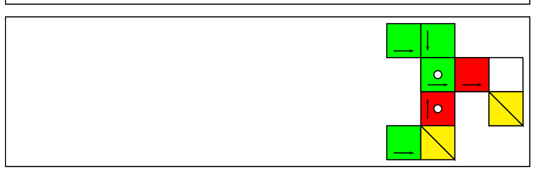
$t = 36$:



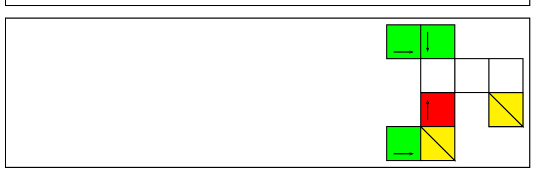
$t = 37$:



$t = 38$:



$t = 39$:



Aus den detaillierten Konstruktionen ergibt sich insgesamt der folgende Satz:

4.14 Satz. *Die Antworten auf alle der folgenden Fragen (Neumann 1966, Seite 292) sind „Ja“:*

> We now reformulate questions (A)–(D) so they apply to von Neumann's 29-state cellular structure, at the same time modifying them somewhat.
>
> (A) *Logical universality:* Can an initially quiescent automaton which performs the computations of a universal Turing machine be embedded in von Neumann's 29-state cellular structure?
>
> (B) *Constructibility:* Can an automaton be constructed by another automaton within von Neumann's 29-state cellular structure?
>
> (C) *Construction-universality:* Can there be embedded in von Neumann's 29-state cellular structure a universal constructor M_c with this property: for each initially quiescent automaton M, there is a coded description $\mathfrak{D}(M)$ of M such that, when $\mathfrak{D}(M)$ is placed on a tape $\mathbf{L}$ attached to M_c, M_c will construct M?
>
> (D) *Self-reproduction:*
>
> (D1) Can a self-reproducing automaton be embedded in von Neumann's 29-state cellular structure?
>
> (D2) Can there be embedded in von Neumann's 29-state cellular structure an automaton which can perform the computations of a universal Turing machine and can also reproduce itself?
>
> All these questions are answered affirmatively in the present work.

Die Konstruktion der Zellularautomaten-Konfigurationen erstreckt sich im Buch von Neumann 1966 von Seite 157 bis Seite 286.

Ein Simulator für von Neumanns Zellularautomaten, der auf PCs mit Windows lauffähig ist, ist kostenlos verfügbar unter `ftp://ftp.ira.uka.de/pub/cellular-automata/jvn/jvn_demo.zip`.

Zusammenfassung

Es gibt sehr einfache Zellularautomaten, in denen sich für alle endlichen Anfangskonfigurationen der Träger nach endlichen vielen Schritten selbst reproduziert.

Von Neumann beschrieb als erster einen Zellularautomaten, der berechnungs- und konstruktionsuniversell ist. Dabei ist die Bezeichnung „konstruktionsuniversell“ zugegebenermaßen nicht präzise gefasst worden und wohl zu viel versprechend. Die Beispiele sollten aber klar gemacht haben, was gemeint ist.

Literatur

Barto, Andrew G. (1978). «A Note on Pattern Reproduction in Tessellation Structures». In: *Journal of Computer and System Sciences* 16, S. 445–455 (siehe S. 20).

Neumann, John von (1966). *Theory of Self-Reproducing Automata*. Edited and completed by Arthur W. Burks. University of Illinois Press (siehe S. 23, 24, 36).

Peitgen, H.-O., H. Jürgens und D. Saupe (1994). *Chaos: Bausteine der Ordnung*. Springer-Verlag (siehe S. 22).

Turing, A. M. (1936). «On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem». In: *Proceedings of the London Mathematical Society*. 2. Ser. 42, S. 230–265 (siehe S. 24).

