

Algorithmen in Zellularautomaten

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 2.1

Gegeben sei ein ZA (R, Q, N, δ) . Es sei $M \subseteq R$ eine Teilmenge von Zellen und $c : R \rightarrow Q$ eine Konfiguration mit der Eigenschaft:

$$\forall i \in M : c_i = \Delta(c)_i$$

Was kann man über die „Aktivitäten“ des ZA beim Konfigurationsübergang $\Delta(c) \mapsto \Delta^2(c)$ sagen?

Lösung 2.1

Es sei $d = \Delta(c)$ und $e = \Delta(d)$. Es sei

$$M' = \{i \in M \mid i + N \subseteq M\} .$$

Nach Voraussetzung gilt für jedes $i \in M$: $c_i = d_i$. Folglich ist für jedes $i \in M'$ auch $d_{i+N} = c_{i+N}$. Also ist für jedes $i \in M'$ auch $e_i = \delta(d_{i+N}) = \delta(c_{i+N}) = d_i$.

Beim Übergang $\Delta(c) \mapsto \Delta^2(c)$ können also nur die Zellen in $R \setminus M'$ ihren Zustand ändern.

Aufgabe 2.2

Gegeben sei der ZA mit

- $R = \mathbb{Z}_n^2$ und $N = H_1^{(2)}$
- $Q = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und
- der folgenden lokalen Überföhrungsfunktion:

$$\delta(\ell) = \ell((0,0)) - 4 \cdot [\ell((0,0)) \geq 4] + \sum_{n' \in N'} [\ell(n') \geq 4]$$

Dabei sei $N' = N \setminus \{(0,0)\}$ und für einen logischen Ausdruck \mathcal{A} sei

$$[\mathcal{A}] = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A} \text{ wahr ist} \\ 0 & \text{falls } \mathcal{A} \text{ falsch ist} \end{cases} .$$

- Was bedeutet die Überföhrungsfunktion, wenn man sich vorstellt, dass jede Zelle eine gewisse Menge „Sandkörner“ enthält?
- Machen Sie sich klar, dass für jedes $\ell \in Q^N$ das oben definierte $\delta(\ell)$ wieder in Q ist.

- c) Machen Sie einfache Experimente mit dem ZA. Benutzen Sie eine endliche quadratische Konfiguration und lassen Sie Sandkörner an den Rändern „aus dem ZA herausfallen“, und keine neuen hereinfallen.
- d) Welche Konsequenzen hat die Randbehandlung?

Lösung 2.2

- a) Jede Zelle, die mindestens 4 Sandkörner enthält, gibt je eines an jede der 4 Nachbarzellen ab.
- b) $\ell((0,0)) - 4 \cdot [\ell((0,0)) \geq 4]$ ist stets kleiner oder gleich 3. Da N' gerade 4 Nachbarn enthält, wird $\delta(\ell)$ nie größer als 7 werden.
- c) Beobachtung von „Wellenfronten“;
- d) Es werden manchmal weniger Körner. Irgendwann hat *jede* Zelle nur noch höchstens 3 Sandkörner: stabile Konfiguration