Algorithmen in Zellularautomaten

1. Grundlegende Definitionen

Thomas Worsch

Fakultät für Informatik
Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2017

Überblick

Grundlegende und abgeleitete Begriffe

Erste Beispiele

Überblick

Grundlegende und abgeleitete Begriffe

Erste Beispiele

Ziele

Verständnis der Begriffe

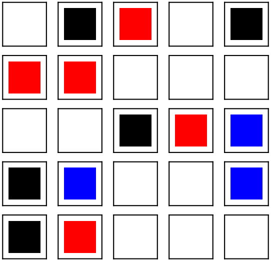
- Raum, Zustandsmenge, Nachbarschaft
- lokale Konfiguration, lokale Überführungsfunktion
- globale Konfiguration, globale Überführungsfunktion

Redeweisen

für uns sind äquivalent:

- Zellularautomat
- zellularer Automat
- zellulärer Automat
- Zellularraum
- zellularer Raum
- ...

Beispiel: eine (globale) Konfiguration

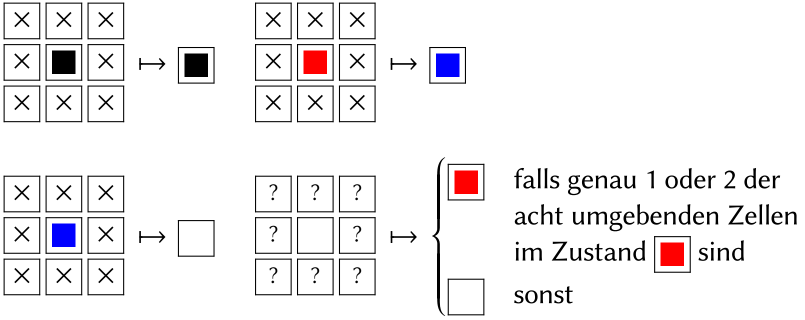


Definitionen (Zellularautomaten, Teil 1)

- *Raum* R *regelmäßig* angeordneter Zellen
  z. B. kartesische Produkte der $\mathbb{Z}_n$ und $\mathbb{Z}$ mit d Faktoren
  Identifikation der Zellen über Koordinaten $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_d)$
- $d \in \mathbb{N}_+$ heißt *Dimensionalität* des Zellularautomaten.
- Die *Zustandsmenge* Q ist endlich.
- Eine *(globale) Konfiguration* ist eine
  Abbildung $c : R \to Q$, also $c \in Q^R$.
- Zustand von Zelle $\mathbf{i}$ in Konfiguration c: $c(\mathbf{i})$ oder kurz $c_{\mathbf{i}}$.

Beispiel: Arbeitsweise von `WIREWORLD`

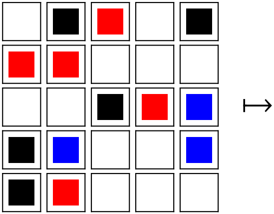
- *Eingaben* einer Zelle: Zustände der 8 Nachbarn
- Davon und vom eigenen Zustand hängt der neue Zustand ab.



? bedeutet: Zustand des entsprechenden Nachbarn relevant

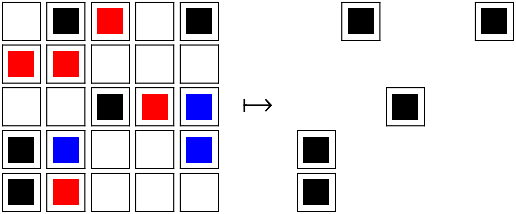
× bedeutet: Zustand des entsprechenden Nachbarn irrelevant

Beispiel: Konfigurationsübergang bei `WIREWORLD`



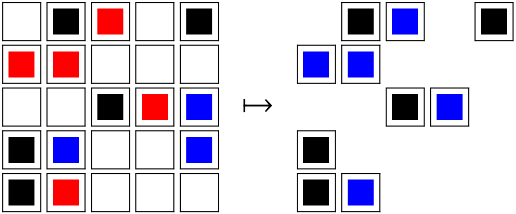
synchrone Arbeitsweise

Beispiel: Konfigurationsübergang bei WIREWORLD



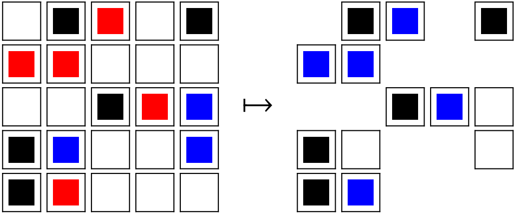
synchrone Arbeitsweise

Beispiel: Konfigurationsübergang bei WIREWORLD



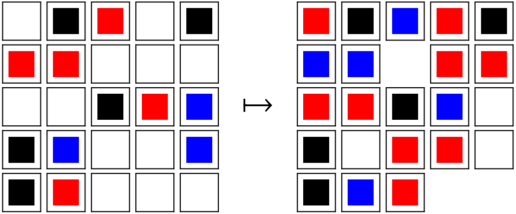
synchrone Arbeitsweise

Beispiel: Konfigurationsübergang bei `WIREWORLD`



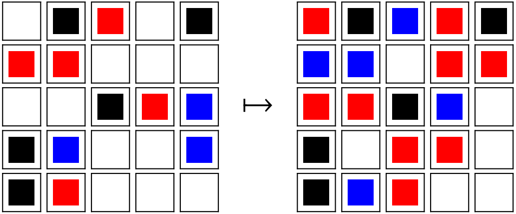
synchrone Arbeitsweise

Beispiel: Konfigurationsübergang bei `WIREWORLD`



synchrone Arbeitsweise

Beispiel: Konfigurationsübergang bei `WIREWORLD`



synchrone Arbeitsweise

Definitionen (Zellularautomaten, Teil 2)

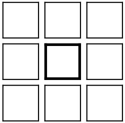
- endliche *Nachbarschaft* $N = \{\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k\} \subset \mathbb{Z}^d$
  Interpretation als Koordinaten*differenzen*
- *Nachbarn* von Zelle $\mathbf{i}$ sind die $\mathbf{i} + \mathbf{n}_j$.

Definition (Moore-Nachbarschaften)

d-dimensionale Moore-Nachbarschaft mit Radius r:

- Zum Beispiel $$M_1^{(2)} = \left\{ \begin{array}{ccc} (-1,1), & (0,1), & (1,1), \\ (-1,0), & (0,0), & (1,0), \\ (-1,-1), & (0,-1), & (1,-1) \end{array} \right\}$$

  oder als Bild:



- allgemein: $M_r^{(d)} = \left\{ (i_1, \ldots, i_d) \,\middle|\, \max_j : |i_j| \le r \right\}$.

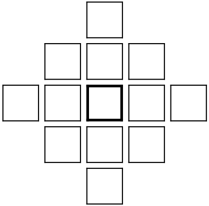
Definition (Von-Neumann-Nachbarschaften)

d-dimensionale Von-Neumann-Nachbarschaft mit Radius r:

- Zum Beispiel

$$H_2^{(2)} = \left\{ \begin{array}{ccccc} & & (0,2), & & \\ & (-1,1), & (0,1), & (1,1), & \\ (-2,0), & (-1,0), & (0,0), & (1,0), & (2,0), \\ & (-1,-1), & (0,-1), & (1,-1), & \\ & & (0,-2) & & \end{array} \right\}$$

oder als Bild:



- allgemein: $H_r^{(d)} = \left\{ (i_1, \ldots, i_d) \;\middle|\; \sum_j |i_j| \leq r \right\}$.

Definitionen (Zellularautomaten, Teil 3)

- *lokale Konfiguration:* eine Abbildung $\ell : N \to Q$, also $\ell \in Q^N$
- Beispiel: $N = \{-1, 0, 1\}$ und $Q = \{0, 1\}$

	$\ell_i(-1)$	$\ell_i(0)$	$\ell_i(1)$
ℓ_0	0	0	0
ℓ_1	0	0	1
ℓ_2	0	1	0
ℓ_3	0	1	1
ℓ_4	1	0	0
ℓ_5	1	0	1
ℓ_6	1	1	0
ℓ_7	1	1	1

Definition (Zellularautomaten, Teil 4)

- Arbeitsweise einer einzelnen Zelle festgelegt durch *lokale Überführungsfunktion δ* :

$$\delta : Q^N \to Q$$

- konventioneller

$$\delta : \underbrace{Q \times Q \times \cdots \times Q}_{|N| \text{ mal}} \to Q$$

  - aber welches ist Reihenfolge der Nachbarn?

Lokale Überführungsfunktion: Beispiel

Beispiel:

$\ell(-1)$	$\ell(0)$	$\ell(1)$	$\delta(\ell)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Lokale Überführungsfunktion: Beispiel

Beispiel:

$\ell(-1)$	$\ell(0)$	$\ell(1)$	$\delta(\ell)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

„Regel 110“

Definition

lokale Konfiguration bei $\mathbf{i} \in R$ *in* $c \in Q^R$ oder auch
von Zelle $\mathbf{i}$ *beobachtete lokale Konfiguration* $c_{\mathbf{i}+N}$:

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{i}+N} : N &\to Q \\ \mathbf{n} &\mapsto c_{\mathbf{i}+\mathbf{n}} \end{aligned}$$

Definition

globale Überführungsfunktion $\Delta : Q^R \to Q^R$

$$\forall\ \mathbf{i} \in R : \quad \Delta(c)_{\mathbf{i}} = (\Delta(c))_{\mathbf{i}} = \delta(c_{\mathbf{i}+N}).$$

synchrone Arbeitsweise: *alle* Zellen machen einen Zustandsübergang

Alternativen zu synchroner Arbeitsweise

- Varianten *asynchroner Arbeitsweise*, z. B.
  - $c \vdash c' \iff \forall\, \mathbf{i} \in R: \; c'_{\mathbf{i}} \in \{\delta(c_{\mathbf{i}+N}), c_{\mathbf{i}}\}$.
  - $c \vdash c' \iff \exists_1\, \mathbf{i} \in R: \; c'_{\mathbf{i}} = \delta(c_{\mathbf{i}+N})$ und $\forall\, \mathbf{j} \neq \mathbf{i} : c'_{\mathbf{j}} = c_{\mathbf{j}}$
- Varianten *probabilistischer Arbeitsweise*, z. B.
  - „quantifizierte Asynchronität“
  - probabilistische lokale Überführungsfunktionen

Darauf kommen wir in späteren Kapiteln zurück.

Überblick

Grundlegende und abgeleitete Begriffe

Erste Beispiele

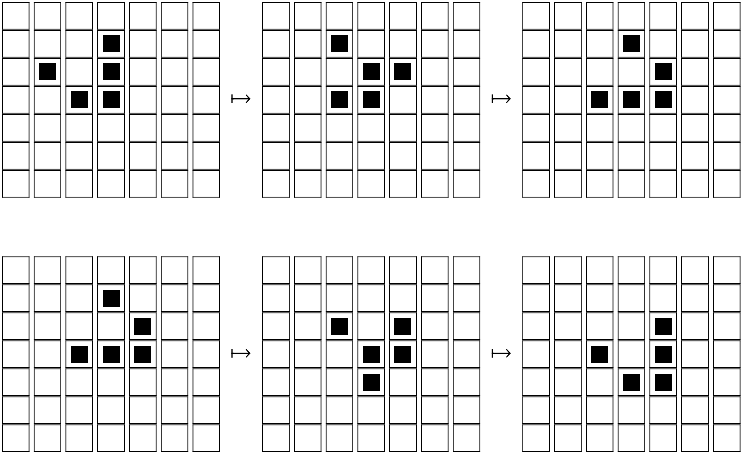
Ziele

- WIREWORLD
- (GAME OF) LIFE
- BANKS

Beispiel: Arbeitsweise von LIFE (Conway)

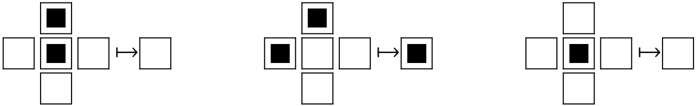
- $R = \mathbb{Z}^2$, $N = M_1^{(2)}$, $Q = \{0, 1\}$ und
- $$\delta(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) \leq 2 \\ 1 & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) = 3 \\ \ell(0) & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) = 4 \\ 0 & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) \geq 5 \end{cases}$$
- Dabei ist $\sum_{n \in N} \ell(n)$ als über den natürlichen Zahlen berechnet aufzufassen.

LIFE: eine Konfigurationsfolge



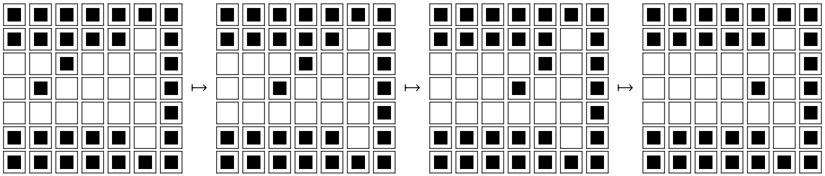
Beispiel: Arbeitsweise des ZA von BANKS

- $R = \mathbb{Z}^2$, $N = H_1^{(2)}$, $Q = \{0, 1\}$ und
- $$\delta(\ell) = \begin{cases} \ell(0) & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) \leq 2 \\ 1 & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) = 3 \text{ und } \ell(0) = 0 \\ 0 & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) = 3 \text{ und } \ell(0) = 1 \\ & \quad \text{und } \ell((1,0)) \neq \ell((-1,0)) \\ 1 & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) = 3 \text{ und } \ell(0) = 1 \\ & \quad \text{und } \ell((1,0)) = \ell((-1,0)) \\ 1 & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) \geq 4 \end{cases}$$
- Graphisch dargestellt:



  - Ebenso für rotierte lokale Konfigurationen.
  - Ansonsten ändere die mittlere Zelle ihren Zustand nicht.

BANKS: eine Konfigurationsfolge



Zellularautomaten auf einen Blick

- *Raum* R, regelmäßig, z. B. $R = \mathbb{Z}^d$, $R = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$
- *Zustandsmenge* Q, endlich
- *Nachbarschaft* $N \subset \mathbb{Z}^d$, endlich
- lokale Konfiguration $\ell : N \longrightarrow Q$, i. e. $\ell \in Q^N$
- *lokale Überführungsfunktion* $\delta : Q^N \longrightarrow Q$
- globale Konfiguration $c : R \longrightarrow Q$, i. e. $c \in Q^R$
- lokale beobachtete Konfiguration: $c_{\mathbf{i}+N} : N \longrightarrow Q : \mathbf{n} \mapsto c_{\mathbf{i}+\mathbf{n}}$
- globale Überführungsfunktion
  $\Delta : Q^R \longrightarrow Q^R$, $\forall \mathbf{i} \in R$: $\Delta(c)_{\mathbf{i}} = \delta(c_{\mathbf{i}+N})$

Zusammenfassung

- deterministischer, synchron arbeitender Zellularautomat $C = (R, Q, N, \delta)$ festgelegt durch:
  - Raum R,
  - endliche Nachbarschaft N,
  - endliche Zustandsmenge Q und
  - lokale Überführungsfunktion $\delta : Q^N \to Q$.
- Zellularautomaten sind *homogen*: gleiche Nachbarschaft und gleiche Arbeitsweise aller Zellen zu allen Zeitpunkten.
- Alle Zellen arbeiten nur aufgrund von *lokal* verfügbarer Information.