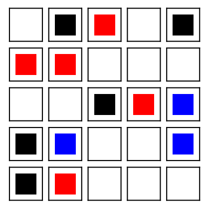
Algorithmen in Zellularautomaten

Thomas Worsch
Institut für Theoretische Informatik
Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2018

1 Grundlegende Definitionen

1.1 Beispiel. Betrachten wir die folgende *regelmäßige* zweidimensonale Anordnung sogenannter *Zellen*:



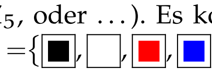
Eine solche Anordnung nennt man auch *Konfiguration*. Natürlich kann man auch ein-, drei- und höherdimensionale Konfigurationen betrachten. Die Vorstellung ist die, dass es sich bei den Zellen um *gleichartige endliche Automaten* handelt. Im Beispiel gibt es für die Zellen anscheinend vier verschiedene mögliche *Zustände*.

1.2 Definition (Zellularautomaten, Teil 1) Der *Raum* R, in dem die Zellen angeordnet sind, ist stets *regelmäßig*[1]. Wir wollen uns (jedenfalls vorläufig) auf kartesische Produkte der $\mathbb{Z}_n$ und $\mathbb{Z}$ mit endlich vielen Faktoren beschränken[2]. Deren Anzahl $d \in \mathbb{N}_+$ heißt auch die *Dimensionalität* des Zellularraumes. Die Identifikation der Zellen erfolgt über *Koordinaten* $i = (i_1, \ldots, i_d) \in Z_1 \times \cdots \times Z_d$ (wobei jedes Z_j eben $\mathbb{Z}$ oder ein $\mathbb{Z}_n$ ist).

Die *Zustandsmenge* Q ist stets endlich.

Eine *globale Konfiguration*, oder kurz *Konfiguration*, ist dann eine Abbildung $c : R \to Q$. Für den Zustand einer Zelle i in Konfiguration c schreiben wir statt $c(i)$ auch c_i. ◇

1.3 Die Menge aller Abbildungen von einer Menge X in eine Menge Y schreiben wir auch als Y^X. Statt $f : X \to Y$ notieren wir daher manchmal auch $f \in Y^X$. Konfigurationen sind also zum Beispiel Objekte $c \in Q^R$.

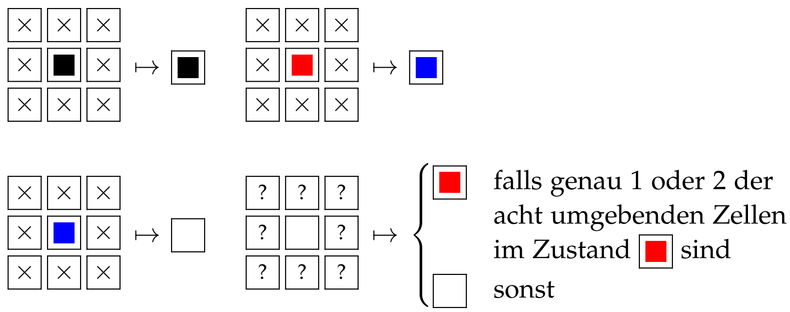
1.4 Beispiel. In Beispiel 1.1 sei per definitionem ein Ausschnitt aus einer Konfiguration in dem Raum $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dargestellt (und nicht $R = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$, oder ...). Es kommen vier verschiedene Zustände vor; und andere gebe es auch gar nicht: $Q =$ .

Kommen wir nun zur Arbeitsweise von Zellularautomaten. Im einfachsten Fall arbeiten die Zellen eines Zellularautomaten *deterministisch*; in einem der letzten Kapitel werden wir aber auch auf *probabilistische* (oder *stochastische*) ZA zu sprechen kommen.

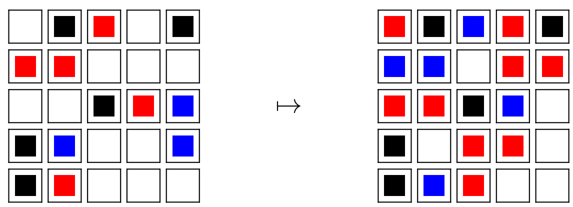
1.5 Beispiel. (`WIREWORLD`) In unserem Beispiel soll jede Zelle als *„Eingaben“* die Zustände der 8 sie unmittelbar umgebenden Zellen erhalten. In Abhängigkeit davon und von ihrem eigenen Zustand geht eine Zelle in einen neuen Zustand über. Wir beschreiben die *lokale Überführungsfunktion* durch die folgenden Regeln. Dabei bedeute ein $\boxed{\times}$, dass der Zustand der entsprechenden Zelle de facto bedeutungslos ist, und ein $\boxed{?}$, dass er bei der Bestimmung des neuen Zustandes der mittleren Zelle relevant ist:

[1] Präzise könnte man das zum Beispiel über gruppentheoretische Methoden (z. B. Cayley-Graphen) machen oder auch über graphentheoretische Konzepte.

[2] Mit $\mathbb{Z}_n$ meinen wir $\{0, \ldots, n-1\}$ mit Addition und Subtraktion modulo n.



1.6 Beispiel. Wir wollen nun davon ausgehen, dass der Konfigurationsausschnitt in Beispiel 1.1 von lauter -Zuständen umgeben ist. (Damit hat *jede* Zelle die acht Nachbarn.) Wenn nun *alle* Zellen *gleichzeitig* einen Schritt gemäß den obigen Regeln machen, so ergibt sich der folgende Konfigurationsübergang:



Man kann pro forma eine Zelle als selbst zu ihrer Nachbarschaft gehörig ansehen. Dann hängt ihr Zustand gerade genau von den Zuständen der Zellen in ihrer Nachbarschaft ab.

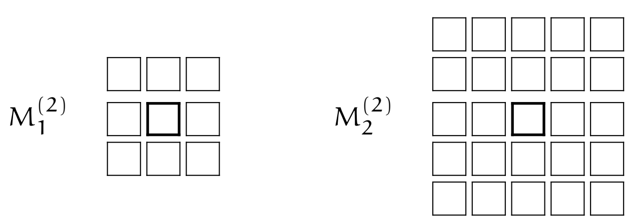
1.7 Definition (Zellularautomaten, Teil 2) Ein *Nachbarschaftsindex*, oder kurz eine *Nachbarschaft*, ist eine endliche Menge $N = \{n_1, \dots, n_k\} \subset \mathbb{Z}^d$. Dabei ist hier $\mathbb{Z}^d$ nicht der Raum R, sondern es geht um Koordinaten*differenzen*. Für $1 \leqslant j \leqslant k$ ist der j-te Nachbar einer Zelle i gerade die Zelle $i + n_j$. (Bei der naheliegenden komponentenweisen Interpretation von $+$.)

Eine Abbildung der Form $l : N \to Q$, also $l \in Q^N$, heißt *lokale Konfiguration*. ◇

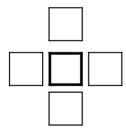
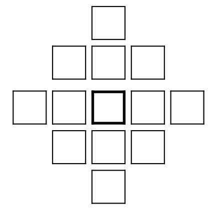
Eine lokale Konfiguration beschreibt eine mögliche Verteilung von Zuständen in der Nachbarschaft einer Zelle, unabhängig von deren absoluter Position im Raum.

1.8 Beispiel. In 1.5 hatten wir als Nachbarschaft $N = M_1^{(2)} = \{(-1,-1),(0,-1),(1,-1),\dots,(0,0),\dots,(1,1)\}$ vereinbart. Sie heißt auch *zweidimensionale Moore-Nachbarschaft mit Radius 1*.

1.9 Definition Die d-*dimensionale Moore-Nachbarschaft* mit Radius r wird mit $M_r^{(d)}$ bezeichnet ist definiert als $M_r^{(d)} = \{(i_1,\dots,i_d) \mid \max_j |i_j| \leqslant r\}$. $M_1^{(2)}$ und $M_2^{(2)}$ sehen wie folgt aus:



Die d-*dimensionale Von-Neumann-Nachbarschaft* mit Radius r ist $H_r^{(d)} = \{(i_1,\dots,i_d) \mid \sum_j |i_j| \leqslant r\}$. $H_1^{(2)}$ und $H_2^{(2)}$ sehen wie folgt aus:

$H_1^{(2)}$  $H_2^{(2)}$  ◇

1.10 Im Eindimensionalen stimmen von-Neumann- und Moore-Nachbarschaft überein.

Jede Nachbarschaft ist in einer von-Neumann- und in einer Moore-Nachbarschaft enthalten. Diese genügen also. Man kann zeigen, dass man sich für sehr viele Fragestellungen sogar o.B.d.A. auf die kleinste (Radius 1) beschränken.

In Beispiel 1.5 hatten wir zur Festlegung des neuen Zustandes einer Zelle stets die Belegung ihrer Nachbarn mit Zuständen herangezogen. Dies wollen wir nun formalisieren:

1.11 Definition (Zellularautomaten, Teil 3) Die Arbeitsweise der einzelnen Zellen eines Zellularautomaten ist durch die *lokale Überführungsfunktion* δ festgelegt:

$$\delta : Q^N \to Q$$

1.12 Wir betrachten hier nur den Fall totaler Abbildungen. Insbesondere liegt also *deterministische Zellularautomaten* vor. Konventioneller (aber die Reihenfolge der Nachbarn verschweigend) ist die Schreibweise:

$$\delta : \underbrace{Q \times Q \times \cdots \times Q}_{|N| \text{ mal}} \to Q$$

In einem solchen Fall muss immer dazugesagt werden, die wievielte Komponente der Zustand welchen Nachbars ist. Üblich ist zum Beispiel im eindimensionalen Fall, $\delta(r, s, t)$ als den neuen Zustand einer Zelle im Zustand s aufzufassen, deren linker Nachbar im Zustand r ist und der rechte im Zustand t.

1.13 Definition Es sei $c : R \to Q$ eine Konfiguration und $i \in R$. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} c_{i+N} : N &\to Q \\ n &\mapsto c_{i+n} \end{aligned}$$

die *lokale Konfiguration bei* i *in* c oder auch die *von Zelle* i *beobachtete lokale Konfiguration*. ◇

1.14 Definition Die *globale Überführungsfunktion* $\Delta : Q^R \to Q^R$ eines deterministischen ZA beschreibt den Übergang von einer Konfiguration zur nächsten und ist durch die Vereinbarung festgelegt, dass *für alle* $i \in R$ gilt:

$$\Delta(c)_i = (\Delta(c))_i = \delta(c_{i+N}).$$ ◇

1.15 Die Arbeitsweise eines solchen ZA ist also streng *synchron*: In jedem Schritt wechseln alle Zellen gleichzeitig ihren Zustand. Wie man außerdem sieht, ist die Arbeitsweise auch *homogen*, denn alle Zellen arbeiten nach der gleichen lokalen Überführungsfunktion. Und auch die Nachbarschaft ist für alle Zellen *gleichförmig*.

Synchrone Arbeitsweise hatten wir auch schon in 1.6 angenommen. Varianten mit asynchroner Arbeitsweise spielen zwar bei der Modellierung realer Phänomene eine gewisse Rolle, wir betrachten sie aber (zumindest vorläufig) nicht.

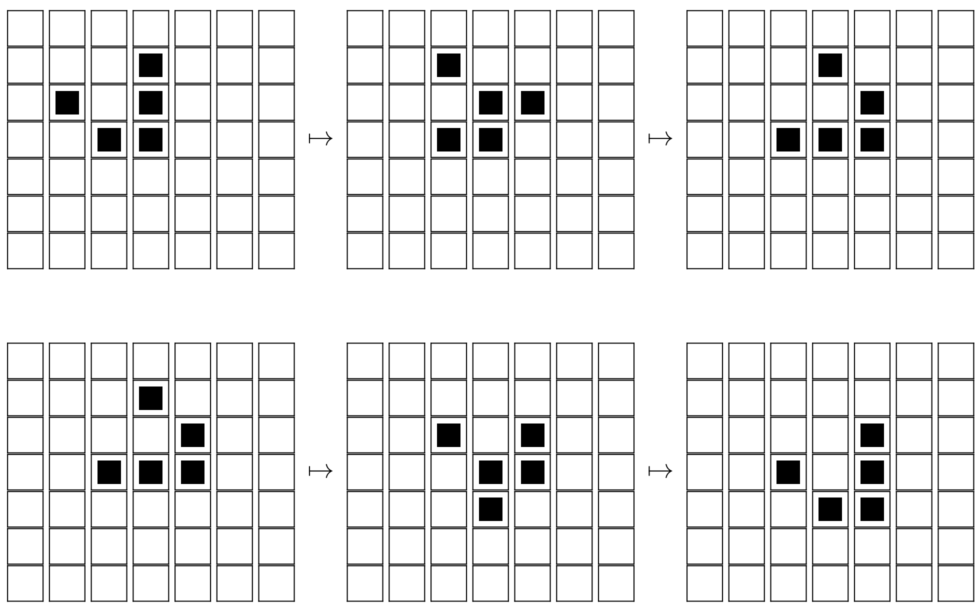
Zum Abschluss dieses einleitenden Kapitels wollen wir noch kurz zwei andere Beispiele erwähnen.

1.16 Beispiel. (LIFE) Der bekannteste Zellularautomat ist wohl Conways zweidimensionales LIFE (siehe z. B. Berlekamp, Conway und Guy 1985). Er ist wie folgt spezifiziert: $R = \mathbb{Z}^2$, $N = M_1^{(2)}$, $Q = \{0, 1\}$ und für die lokale Überführungsfunktion gilt:

$$\delta(l) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \sum_{n \in N} l(n) \leqslant 2 \\ 1 & \text{falls } \sum_{n \in N} l(n) = 3 \\ l(0) & \text{falls } \sum_{n \in N} l(n) = 4 \\ 0 & \text{falls } \sum_{n \in N} l(n) \geqslant 5 \end{cases}$$

Dabei ist $\sum_{n \in N} l(n)$ (offensichtlich) als über den natürlichen Zahlen berechnet aufzufassen.

Eines der Standardbeispiele für eine Konfigurationsfolge von LIFE ist die Bewegung eines sogenannten „gliders“. Dabei ist eine 0 durch $\blacksquare$ dargestellt und eine 1 durch $\square$:

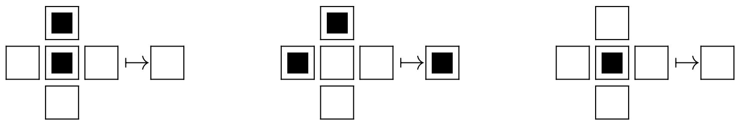


Z. B. unter `http://www.cs.jhu.edu/~callahan/lifepage.html` findet man im WWW weitere Informationen über LIFE.

1.17 Beispiel. (BANKS) In seiner Dissertation hat Banks 1971 einen Zellularautomaten beschrieben, auf den wir wie auch auf WIREWORLD im nächsten Kapitel (kurz) zurückkommen werden. Bei ihm ist $R = \mathbb{Z}^2$, $N = H_1^{(2)}$, $Q = \{0, 1\}$ und für die lokale Überführungsfuntion gilt:

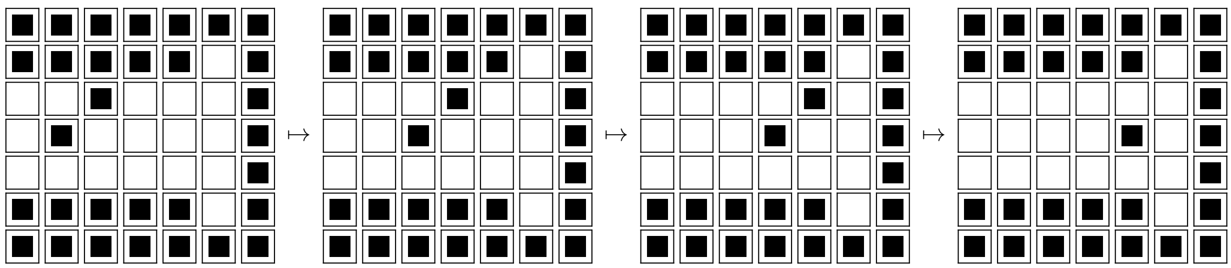
$$\delta(l) = \begin{cases} l(0) & \text{falls } \sum_{n \in N} l(n) \leqslant 2 \\ 1 & \text{falls } \sum_{n \in N} l(n) = 3 \text{ und } l(0) = 0 \\ 0 & \text{falls } \sum_{n \in N} l(n) = 3 \text{ und } l(0) = 1 \text{ und } l((1,0)) \neq l((-1,0)) \\ 1 & \text{falls } \sum_{n \in N} l(n) = 3 \text{ und } l(0) = 1 \text{ und } l((1,0)) = l((-1,0)) \\ 1 & \text{falls } \sum_{n \in N} l(n) \geqslant 4 \end{cases}$$

Stellt man 0 durch $\blacksquare$ dar und 1 durch $\square$, dann gelten zum Beispiel die folgenden Übergänge:



Mit den Vereinbarungen, dass erstens für analoge rotierte lokale Konfigurationen die gleichen Übergänge gelten sollen und dass zweitens in allen anderen Fällen die mittlere Zelle ihren Zustand nicht ändert, hat man die gleiche lokale Überführungsfunktion vollständig spezifiziert.

Ein Ausschnitt aus einer Folge von Konfigurationsübergängen ist zum Beispiel:



Weitere Informationen zu den Ideen von Banks findet man zum Beispiel auf der WWW-Seite `http://www.bottomlayer.com/bottom/banks/banks_commentary.htm`.

Zusammenfassung

Ein deterministischer, synchron arbeitender Zellularautomat $C = (R, Q, N, \delta)$ ist durch die Angabe der folgenden Größen festgelegt:

- Raum R,
- endliche Nachbarschaft N,
- endliche Zustandsmenge Q und
- lokale Überführungsfunktion $\delta : Q^N \to Q$.

Zellularautomaten sind in mehrfacher Hinsicht *homogen*: gleiche Nachbarschaft und gleiche Arbeitsweise aller Zellen zu allen Zeitpunkten.

Alle Zellen arbeiten nur aufgrund von *lokal* verfügbarer Information.

Literatur

Banks, E. R. (Jan. 1971). *Information Processing and Transmission in Cellular Automata*. Techn. Ber. MIT/LCS/TR-81. PhD. MIT Laboratory for Computer Science (siehe S. 5).

Berlekamp, E.R., J.H. Conway und R.K. Guy (1985). *Gewinnen — Strategien für mathematische Spiele*. Bd. 4. Vieweg, Braunschweig (siehe S. 5).