Algorithmen in Zellularautomaten
Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1.1

a) Wieviele lokale Überführungsfunktionen gibt es in Abhängigkeit von Q und N?

b) Finden Sie eine Nummerierung aller ZA mit $Q = \{0, 1\}$ und $N = \{-1, 0, 1\}$, so dass der ZA mit der lokalen Überführungsfunktion, die durch die Tabelle

$\ell(-1)$	$\ell(0)$	$\ell(1)$	$\delta(\ell)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

gegeben ist, die Nummer 110 hat.

c) Verallgemeinern Sie das Prinzip Ihrer Nummerierung für ZA mit $Q = \{0, 1, \ldots, q-1\}$ und n Nachbarn.

d) Worauf muss man achten, wenn man ein kleines Programmstück schreiben soll, das aus einer Regelnummer die Tabelle der lokalen Überführungsfunktion berechnet?

Lösung 1.1

a) $|Q|^{|Q|^{|N|}}$

b)

c)

d) Reihenfolge der Durchnummerierung

Aufgabe 1.2
Laut Wikipedia ist die Zahl der Atome im beobachtbaren Universum etwa 10^{80} (`http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe`). Es sei $U = 10^{80}$.

Bestimmen Sie die Menge aller Paare (q, n) positiver ganzer Zahlen, so dass die Anzahl der ZA mit Zustandsmenge $Q = \{1, \ldots, q\}$ und Nachbarschaft $N = \{1, \ldots, n\}$ höchstens U ist.

Lösung 1.2
Allgemein ist die Zahl der ZA $q^{(q^n)}$. Man schreibe U in der Form $U = q^x$ und prüfe $q^n \leq x$.

$q = 1$: Jedes n ist okay.

$q = 2$: Wegen $U = 2^{80 \cdot \log_2 10} \approx 2^{265.75\ldots}$ muss $2^n \leq 265.75\ldots$, also $n \leq 8$ sein.

$q = 3$: Wegen $U = 3^{80 \cdot \log_3 10} \approx 3^{167.67\ldots}$ muss $3^n \leq 167.67\ldots$, also $n \leq 4$ sein.

$q = 4$: Wegen $U = 4^{80 \cdot \log_4 10} \approx 4^{132.87\ldots}$ muss $4^n \leq 132.87\ldots$, also $n \leq 4$ sein.

$q = 5$: Wegen $U = 5^{80 \cdot \log_5 10} \approx 5^{114.45\ldots}$ muss $5^n \leq 114.45\ldots$, also $n \leq 2$ sein.

$q = 6, 7, 8$: Auch in diesen Fällen muss $n \leq 2$ sein, denn für $q = 9$ ist das auch noch so.

$q = 9$: Wegen $U = 9^{80 \cdot \log_9 10} \approx 9^{83.83\ldots}$ muss $9^n \leq 83.83\ldots$, also $n \leq 2$ sein.

$q = 10$: Wegen $U = 10^{80}$ muss $10^n \leq 80$, also $n \leq 1$ sein.

$q \geq 11$: Wenn $n = 1$ ist, bleibt die Frage, für welche q noch $q^q \leq U$ ist. Der größte zulässige Wert ist $q = 47$.

Aufgabe 1.3
Betrachten Sie den ZA, der in Ihrer Nummerierung aus Aufgabe 1.1 die Nummer 240 hat.

a) Was macht dieser ZA, wenn in der Anfangskonfiguration genau eine Zelle im Zustand `1` ist und alle anderen im Zustand `0`.

b) Konstruieren Sie einen ZA mit Zustandsmenge $\{0, 1, 2\}$ bei dem das, was Sie in Teil a) beobachtet haben, nur «halb so schnell» passiert.

c) Sehen Sie für «allgemeine» Anfangskonfigurationen ein Problem? Sehen Sie einen Ausweg?

Lösung 1.3

a) Tabelle von Regel 240:

$\ell(-1)$	$\ell(0)$	$\ell(1)$	$\delta(\ell)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Also findet in jedem Schritt Verschiebung aller Zustände um eine Zelle nach rechts statt.

b) als komprimierte Tabelle für alle $x, y, z \in \{0, 1, 2\}$:

$\ell(-1)$	$\ell(0)$	$\ell(1)$	$\delta(\ell)$
x	1	z	2
0	0/2	z	0
1	0/2	z	0
2	0/2	z	1

c) Ja. Paare 2/1 tun nicht das naiv vielleicht erwartete:

0	2	1	0	1	2	0	1	0	0
0	0	2	0	2	0	1	2	0	0
0	0	0	1	0	1	2	0	1	0
0	0	0	2	0	2	0	1	2	0
0	0	0	0	1	0	1	2	0	1

Aufgabe 1.4
Überlegen Sie sich die lokale Überführungsfunktion δ für einen Zellularautomaten mit folgenden Eigenschaften:

- $R = \mathbb{Z}$ und $N = H_1$
- $Q = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \overleftarrow{\square}, \overrightarrow{\square}\}$
- Konfigurationsausschnitte, in denen kein «Loch» $\overleftarrow{\square}$ oder $\overrightarrow{\square}$ vorkommt, werden durch δ im nächsten Schritt nicht verändert.
- Ein einzelnes Loch $\overleftarrow{\square}$ wandert nach links (und analog $\overrightarrow{\square}$ nach rechts), und im Austausch dort stehende Symbole in die entgegengesetzte Richtung. Zum Beispiel wird also aus der Konfiguration

...	a	b	$\overrightarrow{\square}$	b	a	a	$\overleftarrow{\square}$	a	...

  in einem Schritt die Konfiguration

...	a	b	b	$\overrightarrow{\square}$	a	$\overleftarrow{\square}$	a	a	...

- Was macht Ihr ZA bei mehreren unmittelbar nebeneinander liegenden Löchern?

Lösung 1.4
Zunächst eine Lösung, wenn es nur Löcher für eine Richtung gibt: $Q = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \overleftarrow{\square}\}$. R stehe für jeden der Zustände a und b und _ und q für beliebige Zustände.

$\ell(-1)$	$\ell(0)$	$\ell(1)$	$\delta(\ell)$
_	R	$\overleftarrow{\square}$	$\overleftarrow{\square}$
R	$\overleftarrow{\square}$	_	R
und in allen anderen Fällen			
_	q	_	q

Löcher für die gleiche Richtung laufen hintereinander her, sobald ein «Nichtloch» zwischen ihnen ist. In der folgenden Beispielberechnung wird angenommen, dass sich links vom dargestellten Bereich lauter $\overleftarrow{\square}$ befinden und rechts davon keine.

`a`	`a`	`a`	$\overleftarrow{\square}$	`b`	$\overleftarrow{\square}$	$\overleftarrow{\square}$	$\overleftarrow{\square}$	`b`
`a`	`a`	$\overleftarrow{\square}$	`a`	$\overleftarrow{\square}$	`b`	$\overleftarrow{\square}$	$\overleftarrow{\square}$	`b`
`a`	$\overleftarrow{\square}$	`a`	$\overleftarrow{\square}$	`a`	$\overleftarrow{\square}$	`b`	$\overleftarrow{\square}$	`b`
$\overleftarrow{\square}$	`a`	$\overleftarrow{\square}$	`a`	$\overleftarrow{\square}$	`a`	$\overleftarrow{\square}$	`b`	`b`
$\overleftarrow{\square}$	$\overleftarrow{\square}$	`a`	$\overleftarrow{\square}$	`a`	$\overleftarrow{\square}$	`a`	`b`	`b`
$\overleftarrow{\square}$	$\overleftarrow{\square}$	$\overleftarrow{\square}$	`a`	$\overleftarrow{\square}$	`a`	`a`	`b`	`b`
$\overleftarrow{\square}$	$\overleftarrow{\square}$	$\overleftarrow{\square}$	$\overleftarrow{\square}$	`a`	`a`	`a`	`b`	`b`

Analog kann man natürlich für $\overrightarrow{\square}$ vorgehen. Wenn man Löcher für *beide* Richtungen hat, ergibt sich ein Problem. Was soll geschehen, wenn ein `a` oder `b` links von sich ein $\overrightarrow{\square}$ sieht und rechts von sich ein $\overleftarrow{\square}$?

Wenn man die Symmetrie willkürlich brechen und festlegen will, dass sich z. B. das $\overleftarrow{\square}$ weiterbewegt, stellt sich die Frage: Woher weiß das die Zelle im Zustand $\overrightarrow{\square}$? Zwei Möglichkeiten fallen ein:

- Man vergrößert die Nachbarschaft.
- Man fügt Zwischenschritte ein, in denen z. B. `a` erst einmal übergeht in $\overleftarrow{\mathtt{a}}$.