Algorithmen in Zellularautomaten

1. Grundlegende Definitionen

Thomas Worsch

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Sommersemester 2018

Überblick

Überblick

Grundlegende und abgeleitete Begriffe

Erste Beispiele

Ziele

Verständnis der Begriffe

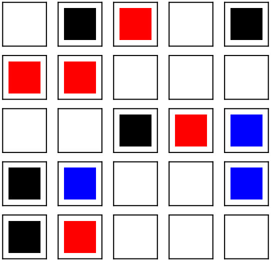
- Raum, Zustandsmenge, Nachbarschaft
- lokale Konfiguration, lokale Überführungsfunktion
- globale Konfiguration, globale Überführungsfunktion

Redeweisen

für uns sind äquivalent:

- Zellularautomat
- zellularer Automat
- zellulärer Automat
- Zellularraum
- zellularer Raum
- …

Beispiel: eine (globale) Konfiguration

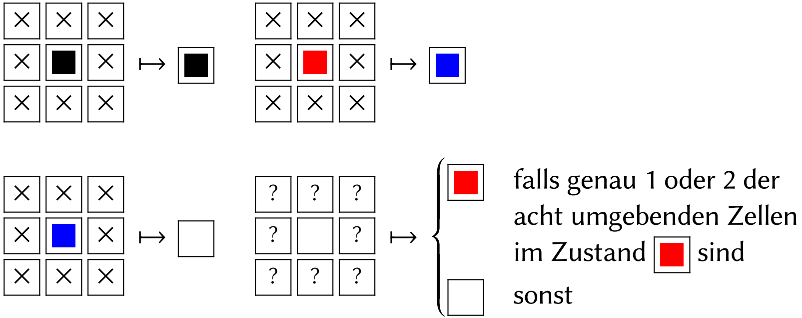


Definitionen (Zellularautomaten, Teil 1)

- *«Raum»* R *regelmäßig* angeordneter Zellen
  z. B. kartesische Produkte der $\mathbb{Z}_n$ und $\mathbb{Z}$ mit d Faktoren
  Identifikation der Zellen über Koordinaten $i = (i_1, \ldots, i_d)$
  - $d \in \mathbb{N}_+$ heißt *Dimensionalität* des Zellularautomaten
- endliche *Zustandsmenge* Q
- *(globale) Konfiguration:* Abbildung $c : R \longrightarrow Q$, also $c \in Q^R$
- Zustand von Zelle i in Konfiguration c: $c(i)$ oder kurz c_i.

Beispiel: Arbeitsweise von `WIREWORLD`

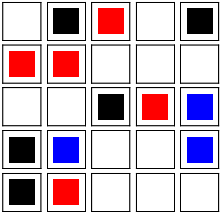
- *Eingaben* einer Zelle: Zustände der 8 Nachbarn
- Davon und vom eigenen Zustand hängt der neue Zustand ab.



? bedeutet: Zustand des entsprechenden Nachbarn relevant

× bedeutet: Zustand des entsprechenden Nachbarn irrelevant

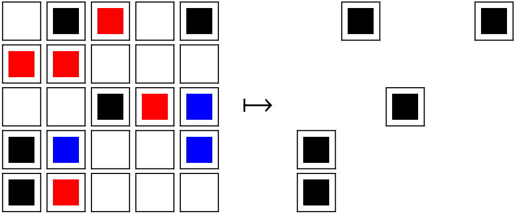
Beispiel: Konfigurationsübergang bei WIREWORLD



$\mapsto$

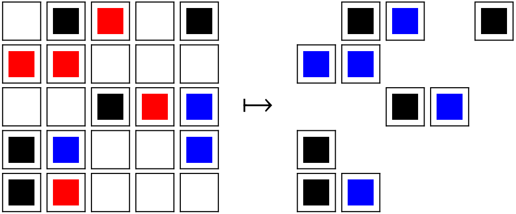
synchrone Arbeitsweise

Beispiel: Konfigurationsübergang bei WIREWORLD



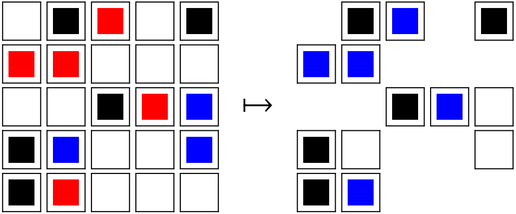
synchrone Arbeitsweise

Beispiel: Konfigurationsübergang bei WIREWORLD



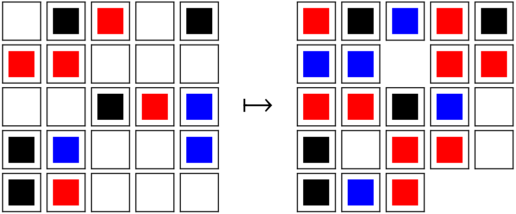
synchrone Arbeitsweise

Beispiel: Konfigurationsübergang bei WIREWORLD



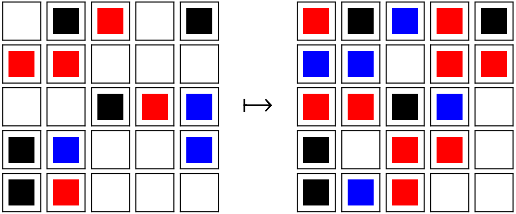
synchrone Arbeitsweise

Beispiel: Konfigurationsübergang bei `WIREWORLD`



synchrone Arbeitsweise

Beispiel: Konfigurationsübergang bei `WIREWORLD`



synchrone Arbeitsweise

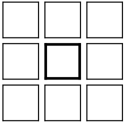
Definitionen (Zellularautomaten, Teil 2)

- endliche *Nachbarschaft* $N = \{n_1, \ldots, n_k\} \subset \mathbb{Z}^d$
  Interpretation als Koordinaten*differenzen*
- *Nachbarn* von Zelle i sind die $i + n_j$.

Definition (Moore-Nachbarschaften)

d-dimensionale Moore-Nachbarschaft mit Radius r:

- allgemein: $M_r^{(d)} = \left\{ (i_1, \dots, i_d) \;\middle|\; \max_j : |i_j| \leq r \right\}$.
- Beispiel $M_1^{(2)} = \{ \; \begin{array}{ccc} (-1,1), & (0,1), & (1,1), \\ (-1,0), & (0,0), & (1,0), \\ (-1,-1), & (0,-1), & (1,-1) \end{array} \; \}$

als Bild: 

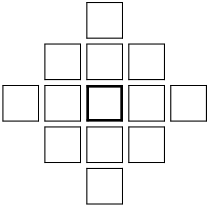
Definition (Von-Neumann-Nachbarschaften)

d-dimensionale Von-Neumann-Nachbarschaft mit Radius r:

- allgemein: $H_r^{(d)} = \left\{ (i_1, \dots, i_d) \,\middle|\, \sum_j |i_j| \le r \right\}$.
- Beispiel

$$
H_2^{(2)} = \left\{ \begin{array}{ccccc}
 & & (0,2), & & \\
 & (-1,1), & (0,1), & (1,1), & \\
(-2,0), & (-1,0), & (0,0), & (1,0), & (2,0), \\
 & (-1,-1), & (0,-1), & (1,-1), & \\
 & & (0,-2) & &
\end{array} \right\}
$$

als Bild:



Definitionen (Zellularautomaten, Teil 3)

- *lokale Konfiguration:* eine Abbildung $\ell : N \to Q$, also $\ell \in Q^N$
- Beispiel: $N = \{-1, 0, 1\}$ und $Q = \{0, 1\}$

	$\ell_i(-1)$	$\ell_i(0)$	$\ell_i(1)$
ℓ_0	0	0	0
ℓ_1	0	0	1
ℓ_2	0	1	0
ℓ_3	0	1	1
ℓ_4	1	0	0
ℓ_5	1	0	1
ℓ_6	1	1	0
ℓ_7	1	1	1

Definition (Zellularautomaten, Teil 4)

- Arbeitsweise einer einzelnen Zelle festgelegt durch *lokale Überführungsfunktion δ* :

$$\delta : Q^N \to Q$$

- konventioneller

$$\delta : \underbrace{Q \times Q \times \cdots \times Q}_{|N| \text{ mal}} \to Q$$

  - aber welches ist Reihenfolge der Nachbarn?

Lokale Überführungsfunktion: Beispiel

Beispiel:

$\ell(-1)$	$\ell(0)$	$\ell(1)$	$\delta(\ell)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Lokale Überführungsfunktion: Beispiel

Beispiel:

$\ell(-1)$	$\ell(0)$	$\ell(1)$	$\delta(\ell)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

„Regel 110“

Definition

lokale Konfiguration bei $i \in R$ in $c \in Q^R$ oder auch
von Zelle i beobachtete lokale Konfiguration c_{i+N}:

$$\begin{aligned} c_{i+N} : N &\rightarrow Q \\ n &\mapsto c_{i+n} \end{aligned}$$

Definition

globale Überführungsfunktion $\Delta : Q^R \to Q^R$

$$\forall\, i \in R: \quad \Delta(c)_i = (\Delta(c))_i = \delta(c_{i+N}).$$

synchrone Arbeitsweise: alle Zellen machen einen Zustandsübergang

Alternativen zu synchroner deterministischer Arbeitsweise

- Varianten *asynchroner Arbeitsweise*, z. B.
  - $c \vdash c' \iff \forall\, i \in R: \ c'_i \in \{\delta(c_{i+N}), c_i\}$.
  - $c \vdash c' \iff \exists_1\, i \in R: \ c'_i = \delta(c_{i+N})$ und $\forall\, j \neq i : c'_j = c_j$
- Varianten *probabilistischer Arbeitsweise*, z. B.
  - „quantifizierte Asynchronität“
  - probabilistische lokale Überführungsfunktionen

Darauf kommen wir in späteren Kapiteln zurück.

Überblick

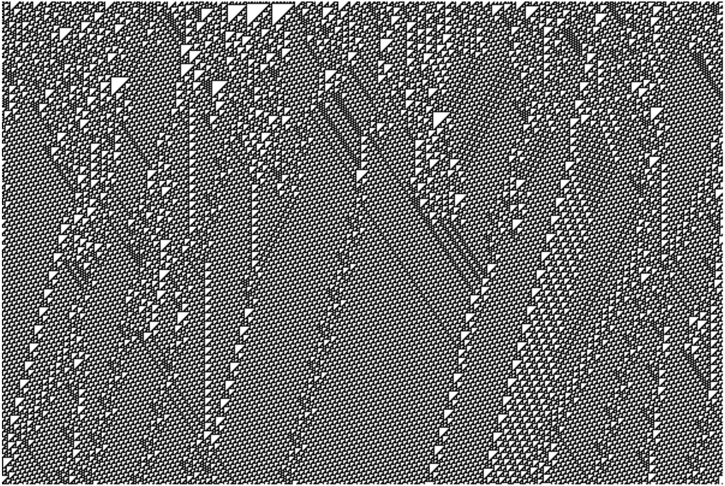
Grundlegende und abgeleitete Begriffe

Erste Beispiele

Ziele

- Regel 110
- WIREWORLD
- (GAME OF) LIFE
- BANKS

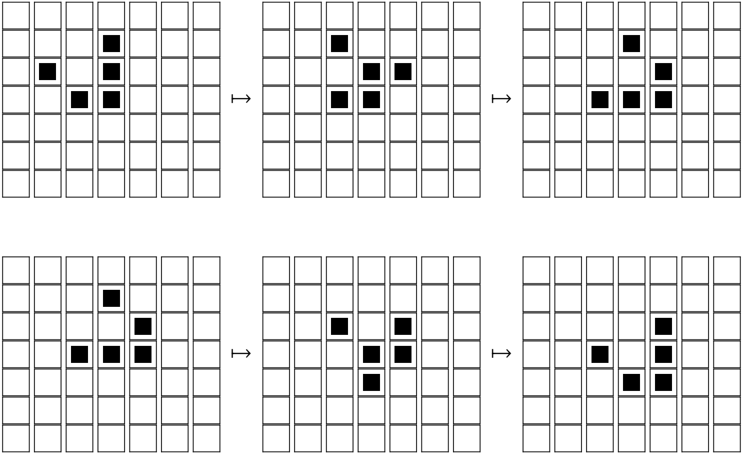
Beispiel: Regel 110



Beispiel: Arbeitsweise von LIFE (Conway)

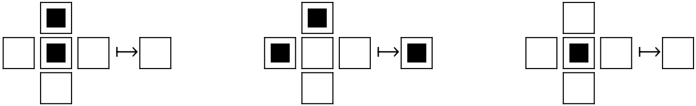
- $R = \mathbb{Z}^2$, $N = M_1^{(2)}$, $Q = \{0, 1\}$ und
- $$\delta(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) \leq 2 \\ 1 & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) = 3 \\ \ell(0) & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) = 4 \\ 0 & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) \geq 5 \end{cases}$$
- Dabei ist $\sum_{n \in N} \ell(n)$ als über den natürlichen Zahlen berechnet aufzufassen.

LIFE: eine Konfigurationsfolge



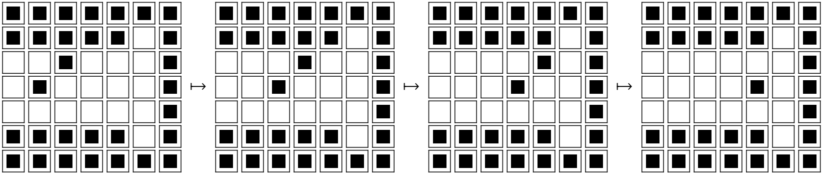
Beispiel: Arbeitsweise des ZA von BANKS

- $R = \mathbb{Z}^2$, $N = H_1^{(2)}$, $Q = \{0, 1\}$ und
- $$\delta(\ell) = \begin{cases} \ell(0) & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) \leq 2 \\ 1 & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) = 3 \text{ und } \ell(0) = 0 \\ 0 & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) = 3 \text{ und } \ell(0) = 1 \\ & \quad \text{und } \ell((1,0)) \neq \ell((-1,0)) \\ 1 & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) = 3 \text{ und } \ell(0) = 1 \\ & \quad \text{und } \ell((1,0)) = \ell((-1,0)) \\ 1 & \text{falls } \sum_{n \in N} \ell(n) \geq 4 \end{cases}$$
- graphisch dargestellt (analog für rotierte lokale Konfigurationen):



  - ansonsten keine Zustandsänderung

BANKS: eine Konfigurationsfolge



Zellularautomaten auf einen Blick

- *Raum* R, regelmäßig, z. B. $R = \mathbb{Z}^d$, $R = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$
- *Zustandsmenge* Q, endlich
- *Nachbarschaft* $N \subset \mathbb{Z}^d$, endlich
- lokale Konfiguration $\ell : N \longrightarrow Q$, i. e. $\ell \in Q^N$
- *lokale Überführungsfunktion* $\delta : Q^N \longrightarrow Q$
- globale Konfiguration $c : R \longrightarrow Q$, i. e. $c \in Q^R$
- lokale beobachtete Konfiguration: $c_{i+N} : N \longrightarrow Q : n \mapsto c_{i+n}$
- globale Überführungsfunktion
  $\Delta : Q^R \longrightarrow Q^R$, $\forall i \in R$: $\Delta(c)_i = \delta(c_{i+N})$

Zusammenfassung

- deterministischer, synchron arbeitender Zellularautomat $C = (R, Q, N, \delta)$ festgelegt durch:
    - Raum R,
    - endliche Nachbarschaft N,
    - endliche Zustandsmenge Q und
    - lokale Überführungsfunktion $\delta : Q^N \to Q$.
- *Homogenität:* gleiche Nachbarschaft und gleiche Arbeitsweise aller Zellen zu allen Zeitpunkten
- Arbeitsweise einer Zelle nur von *lokal* verfügbaren Informationen abhängig