# Zellularautomaten — eine Einführung

Thomas Worsch

## Überblick

1. Ursprung
2. „Bestandteile“ von Zellularautomaten
3. Haken und Ösen

## 1. Ursprung

John von Neumann 1903–1957

Selbstreproduktion bei nichttrivialen Maschinen?

Idee von Stanislaw Ulam aufgegriffen

überarbeitet und veröffentlicht in dem Buch

> *Arthur W. Burks (Hrsg.):*
> *Theory of Self-Reproducing Automata*
> *University of Illinois Press, 1966*

weitere Ausgangspunkte?

## 2. „Bestandteile“ von Zellularautomaten

Ein Zellularautomat besteht aus

- einem regelmäßigen **Gitter**, auf dem
- Automaten — die **Zellen** — mit endlicher **Zustandsmenge** sitzen,
- die innerhalb ihrer **Nachbarschaft** Informationen austauschen und
- gemäß einer für alle gleichen **lokalen Überführungsfunktion** verarbeiten.

## 2. Grundbegriffe und abgeleitete Begriffe bei Zellularautomaten

2.1 regelmäßiges Gitter

2.2 Zustandsmenge

[ 2.3 globale Konfiguration ]

2.4 Nachbarschaft

[ 2.5 lokale Konfiguration ]

2.6 lokale Überführungsfunktion

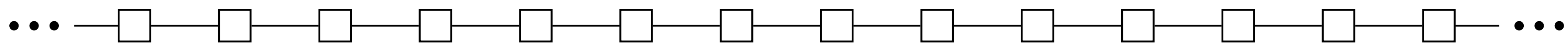
[ 2.7 globale Überführungsfunktion ]

## 2.1 Regelmäßige Gitter

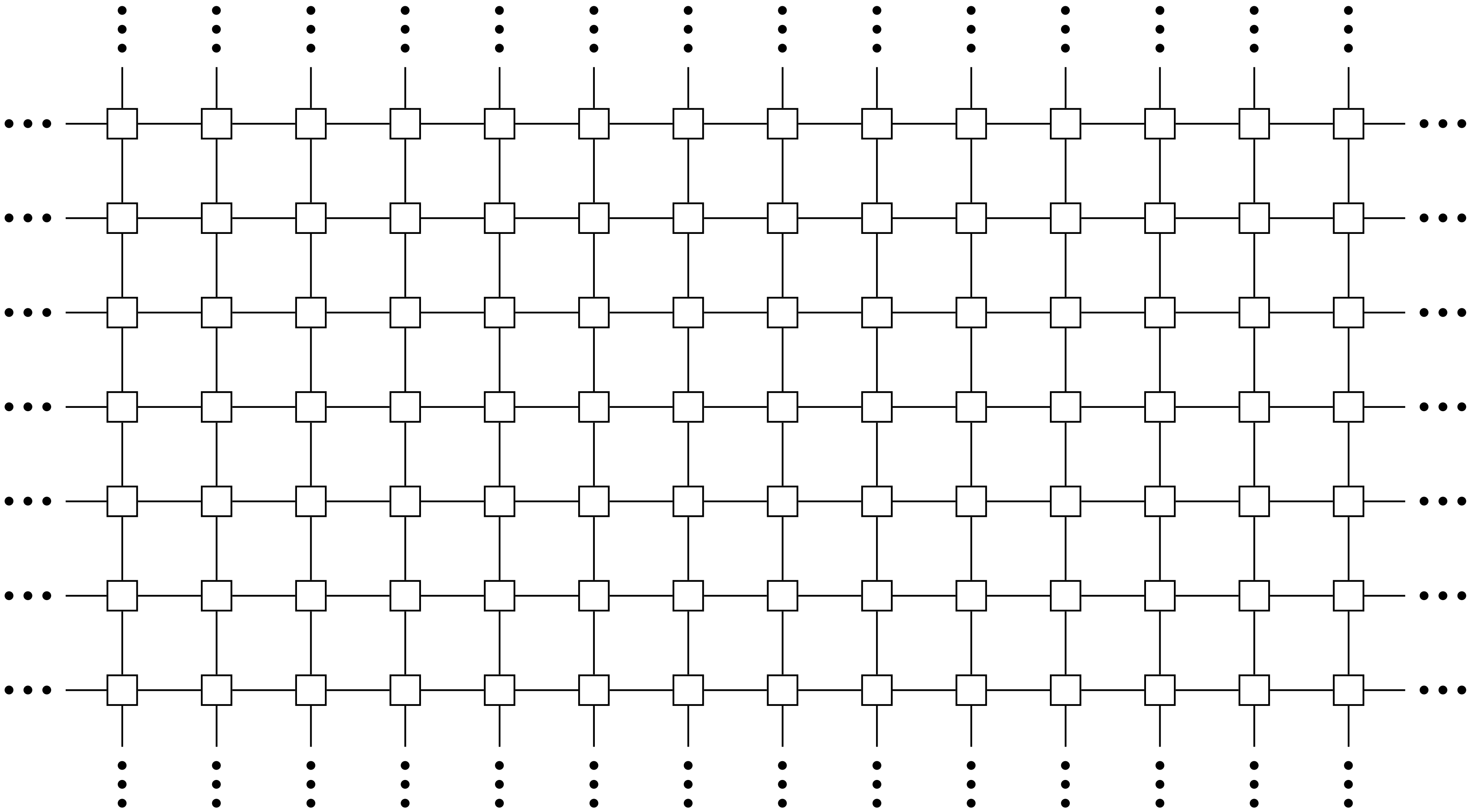
verschiedene Möglichkeiten mit zum Teil unterschiedlichen Auswirkungen:
orthogonale Gitter, Wabengitter, Bäume, etc. pp.

formaler Bezeichner: $R$

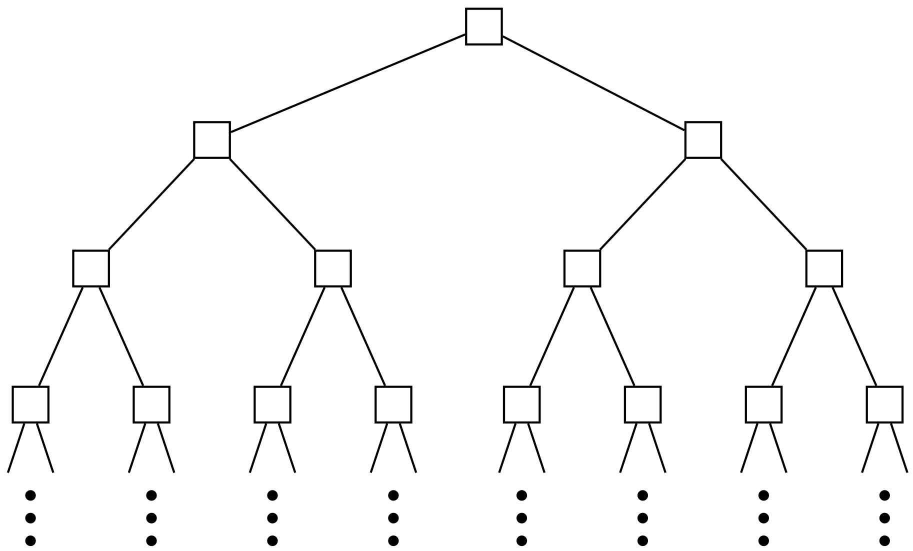
Beispiel $R = \mathbb{Z}$:



Beispiel $R = \mathbb{Z}^2$:



Beispiel $R = \mathbb{T}_2$:



bei uns aber nur orthogonale Gitter $\mathbb{Z}^d$

## 2.2 Zustandsmenge

endlich

für jede Zelle gleich

keine weiteren Einschränkungen

formaler Bezeichner: $Q$

Beispiele:

- $Q = \{0, 1\}$
- $Q = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{99} \cup \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$
- $Q = \{x \in \mathbb{R} \mid x$ ist exakt als double im IEEE-Format darstellbar$\}$

## 2.3 Abgeleiteter Begriff: globale Konfiguration

„Gesamtzustand“ des ZA zu einem Zeitpunkt

Formalisierung:

Abbildung, die aktuellen Zustand jeder Zelle beschreibt: $c : R \to Q$
oder auch $c \in Q^R$, wobei $Q^R$ die Menge aller Abbildungen von $R$ in $Q$ ist

Schreibweise: statt $c(i)$ auch $c_i$

Beispiel: $R = \mathbb{Z}$, $Q = \{0, 1\}$.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cdots$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\cdots$ |

$$\ldots = c(-5) = c(-4) = c(-3) = c(-2) = 0,$$
$$c(-1) = 1,\ c(0) = 1,\ c(1) = 0,\ c(2) = 1,$$
$$0 = c(3) = c(4) = c(5) = c(6) = \ldots$$

## 2.4 Nachbarschaft

endlich

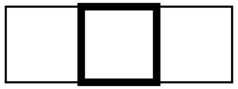
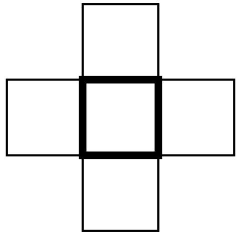
für alle Zellen gleichförmig

bei uns immer Angabe in Form von „relativen Entfernungen“/Koordinatendifferenzen
$\Longrightarrow$ dann ist z.B. der linke Nachbar immer $-1$

sinnvolle Nachbarschaften vom Gitter des ZA abhängig

formaler Bezeichner: $N$

Beispiele:

- $R = \mathbb{Z}$: $\quad N = \{-1, 0, 1\}$ 
- $R = \mathbb{Z}$: $\quad N = \{-111, 22, 999, 123456789\}$
- $R = \mathbb{Z}^2$: $\quad N = \left\{ \begin{array}{ccc} & (0,1), & \\ (-1,0), & (0,0), & (1,0), \\ & (0,-1) & \end{array} \right\}$ 

## 2.5 abgeleiteter Begriff: lokale Konfiguration

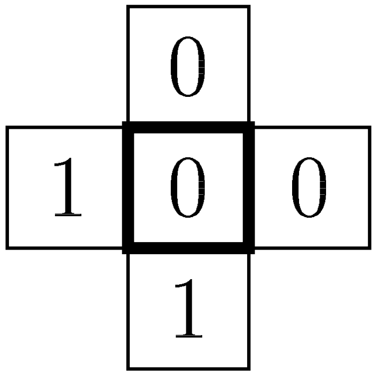
„Gesamtzustand“ in der lokalen Umgebung einer Zelle

Formalisierung:

Abbildung, die die Zustände in einer Nachbarschaft beschreibt: $\ell : N \to Q$
oder auch $\ell \in Q^N$, wobei $Q^N$ die Menge aller Abbildungen von $N$ in $Q$ ist.

Es gibt $|Q|^{|N|}$ lokale Konfigurationen.

Beispiel: $R = \mathbb{Z}^2$, $N$ von Neumann-Nachbarschaft (mit Radius $1$)



Beispiel: $R = \mathbb{Z}$, $N = \{-1, 0, 1\}$, $Q = \{0, 1\}$.
Dann gibt es $2^3$ lokale Konfigurationen $\ell : N \to Q$:

| $\ell(-1)$ | $\ell(0)$ | $\ell(1)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

## 2.5 abgeleiteter Begriff: lokal beobachtete Konfiguration

in globaler Konfiguration $c$ von Zelle $i$ in ihrer Umgebung beobachtete lokale Konfiguration

Formale Bezeichnung: $c(i + N)$

Andere Schreibweise: statt $c(i + N)$ auch $c_{i+N}$

Definition: $c(i + N) : \begin{array}{rcl} N & \to & Q \\ n & \mapsto & c(i + n) \end{array}$

## 2.6 Lokale Überführungsfunktion

beschreibt die (identische) Arbeitsweise aller Zellen

Es können nur die Zustände von Nachbarzellen verarbeitet werden.
Der Rest ist unbekannt. (Myopie = Kurzsichtigkeit)

Festlegung des neuen Zustandes einer Zelle in Abhängigkeit
von den alten Zuständen aller Nachbarzellen.

deterministisch

Formalisierung: $\delta : Q^N \to Q$.

Beispiel: $R = \mathbb{Z}$, $N = \{-1, 0, 1\}$, $Q = \{0, 1\}$.

| $\ell(-1)$ | $\ell(0)$ | $\ell(1)$ | $\delta(\ell)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Kurz gesagt: $\delta(\ell) = \ell(-1) \oplus \ell(1)$.

Das ist die sogenannte Regel 90.

## 2.7 Globale Überführungsfunktion

beschreibt einen Schritt des Gesamtsystems

durch $\delta$ festgelegt aufgrund der **synchronen** Arbeitsweise

Formalisierung: $\Delta : Q^R \to Q^R$

dabei gilt für **jede** Zelle $i$: $\Delta(c)(i) = \delta(c(i + N))$

bzw.: $\Delta(c)_i = \delta(c_{i+N})$

Beispiel: Raum-Zeit-Diagramm für Regel 90

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $t+1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $t+2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $t+3$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $t+4$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

und so weiter

(Randnotiz: Musterreproduktion!)

## 3. Haken und Ösen

Geometrie: unregelmäßig?

lokale Überführungsfunktion: probabilistisch?

Arbeitsweise: asynchron?

## 3.1 Geometrie

Endliche Gitter, zu Tori geschlossen
$\Longrightarrow$ es gibt keine Randzellen mit weniger Nachbarn

Margolus-Nachbarschaft: zeitlich wechselnd, periodisch

## 3.2 Probabilistische Zellularautomaten

Probabilistische lokale Überführungsfunktionen:

$$\delta : Q^N \to [0;1]^Q$$

Dabei ist $\delta(\ell)(q)$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zelle, die in ihrer Umgebung die lokale Konfiguration $\ell$ beobachtet, in den neuen Zustand $q$ übergeht.

Daher die Forderung, dass für alle lokalen Konfigurationen $\ell$ gelten muss:

$$\sum_{q \in Q} \delta(\ell)(q) = 1$$

Bei probabilistischen ZA ist $\Delta$ keine (rechtseindeutige) Abbildung mehr ...

## 3.3 Asynchrone Zellularautomaten

In jedem globalen Schritt müssen nicht mehr alle Zellen in einen neuen Zustand übergehen.

Formalisierung: für alle Zellen $i$ muss gelten:

$$\Delta(c)(i) \in \big\{c(i), \delta(c(i+N))\big\}$$

Bei asynchronen ZA ist $\Delta$ keine (rechtseindeutige) Abbildung mehr ...

## Zusammenfassung: Standard-ZA auf einen Blick

$R$: Gitter, regelmäßig

$Q$: Zustandsmenge, endlich

$c \in Q^R$: globale Konfiguration

$N$: Nachbarschaft, endlich

$\ell \in Q^N$: lokale Konfiguration

$c(i+N) \in Q^N, c(i+N) : n \mapsto c(i+n)$: lokale Konfiguration

$\delta : Q^N \to Q$: lokale Überführungsfunktion

$\Delta : Q^R \to Q^R : c \mapsto \langle i \mapsto \delta(c(i+N)) \rangle$: globale Überführungsfunktion

Der Variationen gibt es gar viele ...