4 WÖRTER

4.1 WÖRTER

Jeder weiß, was ein Wort ist: Ein *Wort über einem Alphabet* A ist eine Folge von Zeichen aus A. Aber gerade weil jeder weiß, was das ist, werden wir uns im folgenden eine Möglichkeit ansehen, eine formale Definition des Begriffes „Wort" zu geben. Sinn der Übung ist aber nicht, eine einfache Sache möglichst kompliziert darzustellen, sondern an einem Beispiel, das niemandem ein Problem bereitet, Dinge zu üben, die in späteren Einheiten noch wichtig werden.

Wort über einem Alphabet A

Vorher aber noch kurz eine Bemerkung zu einem Punkt, an dem wir sich der Sprachgebrauch in dieser Vorlesung (und allgemeiner in der Theorie der formalen Sprachen) vom umgangssprachlichen unterscheidet: Das *Leerzeichen*. Übrigens benutzt man es heutzutage (jedenfalls z. B. in europäischen Schriften) zwar ständig — früher nicht! Aber wie der Name sagt, fassen wir auch das Leerzeichen als ein Zeichen auf. Damit man es sieht, schreiben wir manchmal explizit `␣` statt einfach nur Platz zu lassen.

Konsequenz der Tatsache, dass wir das Leerzeichen, wenn wir es denn überhaupt benutzen, als ein ganz normales Symbol auffassen, ist jedenfalls, dass z. B. `Hallo␣Welt` *eine* Folge von Zeichen, also nur *ein* Wort ist (und nicht zwei).

Was man für eine mögliche technische Definition von „Wort" braucht, ist im wesentlichen eine Formalisierung von "Liste" (von Symbolen). Für eine bequeme Notation definieren wir zunächst: Für jede natürliche Zahl $n \geqslant 0$ sei $\mathbb{G}_n = \{i \in \mathbb{N}_0 \mid 0 \leqslant i \wedge i < n\}$ die Menge der n kleinsten nichtnegativen ganzen Zahlen. Zum Beispiel ist $\mathbb{G}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, $\mathbb{G}_1 = \{0\}$ und $\mathbb{G}_0 = \{\}$.

Dann wollen wir jede *surjektive* Abbildung $w : \mathbb{G}_n \to A$ als ein *Wort* auffassen. Die Zahl n heiße auch die *Länge* des Wortes, für die man manchmal kurz $|w|$ schreibt. (Es ist in Ordnung, wenn Sie im Moment nur an Längen $n \geqslant 1$ denken. Auf den Fall des sogenannten leeren Wortes ε mit Länge $n = 0$ kommen wir im nachfolgenden Unterabschnitt gleich noch zu sprechen.)

Wort, formalistisch definiert

Länge eines Wortes

Das Wort (im umgangssprachlichen Sinne) $w = \texttt{hallo}$ ist dann also formal die Abbildung $w : \mathbb{G}_5 \to \{\texttt{a}, \texttt{h}, \texttt{l}, \texttt{o}\}$ mit $w(0) = \texttt{h}$, $w(1) = \texttt{a}$, $w(2) = \texttt{l}$, $w(3) = \texttt{l}$ und $w(4) = \texttt{o}$.

Im folgenden werden wir uns erlauben, manchmal diese formalistische Sicht auf Wörter zu haben, und manchmal die vertraute von Zeichenfolgen. Dann ist insbesondere jedes einzelne Zeichen auch schon ein Wort. Formalismus, vertraute Sichtweise und das Hin- und Herwechseln zwischen beidem ermöglich dreierlei:

- präzise Argumentationen, wenn andernfalls nur vages Händewedeln möglich wäre,
- leichteres Vertrautwerden mit Begriffen und Vorgehensweisen bei Wörtern und formalen Sprachen, und
- das langsame Vertrautwerden mit Formalismen.

Ganz häufig ist man in der Situation, dass man ein Alphabet A gegeben hat und über die *Menge aller Wörter* reden möchte, in denen höchstens die Zeichen aus A vorkommen. Dafür schreibt man A^*. Ganz formalistisch gesehen ist das also Menge aller surjektiven Abbildungen $w : \mathbb{G}_n \to B$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $B \subseteq A$. Es ist aber völlig in Ordnung, wenn Sie sich einfach Zeichenketten vorstellen.

Menge aller Wörter

A^*

4.2 DAS LEERE WORT

Beim Zählen ist es erst einmal natürlich, dass man mit eins beginnt: 1, 2, 3, 4, … Bei Kindern ist das so, und geschichtlich gesehen bei Erwachsenen lange Zeit auch so. Irgendwann stellte sich jedoch die Erkenntnis ein, dass die Null auch ganz praktisch ist. Daran hat sich jeder gewöhnt, wobei vermutlich eine gewisse Abstraktion hilfreich war; oder stellen Sie sich gerade vor, dass vor Ihnen auf dem Tisch 0 Elefanten stehen?

Ebenso umfasst unsere eben getroffene Definition von „Wort“ den Spezialfall der Wortlänge $n = 0$. Auch ein Wort der Länge 0 verlangt zugegebenermaßen ein bisschen Abstraktionsvermögen. Es besteht aus 0 Symbolen. Deshalb sieht man es so schlecht.

Wenn es Ihnen hilft, können Sie sich die formalistische Definition ansehen: Es ist $\mathbb{G}_0 = \{\}$ die leere Menge; und ein Wort der Länge 0 enthält keine Zeichen. Formalisiert als surjektive Abbildung ergibt das dann ein $w : \{\} \to \{\}$.

Wichtig:

- Wundern Sie sich nicht, wenn Sie sich über $w : \{\} \to \{\}$ erst einmal wundern. Sie werden sich an solche Dinge schnell gewöhnen.
- Vielleicht haben Sie ein Problem damit, dass der Definitionsbereich oder/und der Zielbereich von $w : \{\} \to \{\}$ die leere Menge ist. Das ist aber nicht wirklich eines: Man muss nur daran denken, dass Abbildungen besondere Relationen sind.
- Es gibt nur eine Relation $R \subseteq \{\} \times \{\} = \{\}$, nämlich $R = \{\}$. Als Menge von Paaren aufgefasst ist dieses R aber linkstotal und rechtseindeutig, also tatsächlich eine Abbildung; und die ist sogar rechtstotal. Also ist es richtig von *dem leeren Wort* zu sprechen.

leeres Wort

Nun gibt es ähnlich wie schon beim Leerzeichen ein ganz praktisches Problem: Da das leere Wort aus 0 Symbolen besteht, „sieht man es nicht“. Das führt leicht zu Verwirrungen. Man will aber gelegentlich ganz explizit darüber sprechen und schreiben. Deswegen vereinbaren wir, dass wir für das leere Wort ε schreiben.

Beachten Sie, dass wir in unseren Beispielen Symbole unseres Alphabetes immer blau darstellen, ε aber nicht. Es ist nie Symbol das gerade untersuchten Alphabetes. Wir benutzen dieses Zeichen aus dem Griechischen als etwas, das Sie immer interpretieren (siehe Einheit 2) müssen, nämlich als das leere Wort.

Für die Menge aller Wörter einer festen Länge n über einem Alphabet A schreiben wir auch A^n. Wenn zum Beispiel das zu Grunde liegende Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ ist, dann ist: A^n

$$\begin{aligned} A^0 &= \{\varepsilon\} \\ A^1 &= \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\} \\ A^2 &= \{\mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{ba}, \mathtt{bb}\} \\ A^3 &= \{\mathtt{aaa}, \mathtt{aab}, \mathtt{aba}, \mathtt{abb}, \mathtt{baa}, \mathtt{bab}, \mathtt{bba}, \mathtt{bbb}\} \end{aligned}$$

Vielleicht haben nun manche die Idee, dass man auch erst die A^n hätte definieren können, und dann festlegen:

$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \cdots$$

Das unschöne daran sind die „$\cdots$“: Im vorliegenden Fall mag ja noch klar sein, was gemeint ist. Da wir aber darauf achten wollen, dass Sie sich nichts angewöhnen, was im allgemeinen zu Problemen führen könnte (und dafür sind Pünktchen, bei denen man darauf baut, dass der Leser schon die passende Interpretation haben möge, prädestiniert), wollen wir lieber folgende Schreibweise benutzen:

$$A^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i$$

Allerdings sind hier nun zwei Anmerkungen ganz wichtig:

- Sie können mit Recht fragen, was denn präzise so etwas wie
$$\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$$
bedeuten soll, wenn M_0, M_1, M_2, $\ldots$ (schon wieder die Pünktchen ...) unendlich viele Menge sind. Das hier:
$$\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i = \{x \mid \exists i : x \in M_i\}$$
also alle Elemente, die in mindestens einem M_i enthalten sind.

- Das ∞-Zeichen in obiger Schreibweise ist leider gefährlich. Es kann so missverstanden werden, als könne i auch „den Wert Unendlich“ annehmen. *Das ist **nicht** so!* Gemeint ist nur, dass i alle Werte aus dem Bereich der ganzen Zahlen ab $i = 0$ durchläuft. Und jede dieser Zahlen ist *endlich*; es sind aber unendlich viele.

Zahlen kann man zum Beispiel addieren oder multiplizieren. Man spricht auch davon, dass die Addition und Multiplikation zweistellige oder binäre Operationen sind.

Für Wörter definieren wir nun auch eine ganz einfache aber wichtige binäre Operation: die sogenannte *Konkatenation* von Wörtern. Das ist einfach die Hintereinanderschreibung zweier Wörter. Als Operationssymbol verwendet man üblicherweise wie bei der Multiplikation von Zahlen den Punkt „·". Also zum Beispiel:

Konkatenation

$$\texttt{SCHRANK} \cdot \texttt{SCHLÜSSEL} = \texttt{SCHRANKSCHLÜSSEL}$$

oder

$$\texttt{SCHLÜSSEL} \cdot \texttt{SCHRANK} = \texttt{SCHLÜSSELSCHRANK}$$

Oft lässt man wie bei der Multiplikation auch den Konkatenationspunkt weg.

Wie man sieht, kommt es (im Gegensatz zur Multiplikation von Zahlen) auf die Reihenfolge an: Ein `SCHRANKSCHLÜSSEL` ist etwas anderes als ein `SCHLÜSSELSCHRANK`.

Nun wollen wir die *Konkatenation zweier Wörter formal* definieren. Nehmen wir also an, es seien zwei Wörter $w_1 : \mathbb{G}_m \to A_1$ und $w_2 : \mathbb{G}_n \to A_2$ gegeben. Dann ist

Konkatenation zweier Wörter formal

$$\begin{aligned} w_1 \cdot w_2 : \mathbb{G}_{m+n} &\to A_1 \cup A_2 \\ i &\mapsto \begin{cases} w_1(i) & \text{falls } 0 \leqslant i < m \\ w_2(i-m) & \text{falls } m \leqslant i < m+n \end{cases} \end{aligned}$$

Ist das eine sinnvolle Definition? Oder vielmehr: Ist das überhaupt eine Definition? Und wird hier ein Wort definiert?

- Als erstes hat man sich zu überlegen, dass die Ausdrücke $w_1(i)$ für $0 \leqslant i < m$ und $w_2(i-m)$ für $m \leqslant i < m+n$ stets definiert sind. Das ist so.
- Zweitens stammen die in der Fallunterscheidung vorgeschriebenen Funktionswerte tatsächlich aus dem Bereich $A_1 \cup A_2$: denn $w_1(i)$ ist stets aus A_1 und $w_2(i-m)$ ist stets aus A_2.
- Drittens muss man sich klar machen, dass die Fallunterscheidung von der Art ist, dass für jedes $i \in \mathbb{G}_{m+n}$ nur genau *ein* Funktionswert festgelegt wird und nicht mehrere verschiedene.
- Und schließlich muss man sich noch klar machen, dass wieder ein *Wort* definiert wird: Dafür muss die Abbildung $w_1 \cdot w_2 : \mathbb{G}_{m+n} \to A_1 \cup A_2$ surjektiv sein. Das ist sie auch. Denn für jedes $a \in A_1 \cup A_2$ gilt (mindestens) eine der folgenden Möglichkeiten:
  - $a \in A_1$: Dann gibt es aber, da w_1 ein Wort ist, also eine surjektive Abbildung, ein $i_1 \in \mathbb{G}_m$ mit $w_1(i_1) = a$. Also ist $(w_1 w_2)(i_1) = w_1(i_1) = a$.

– $a \in A_2$: Dann gibt es aber, da w_2 ein Wort ist, also eine surjektive Abbildung, ein $i_2 \in \mathbb{G}_n$ mit $w_2(i_2) = a$. Also ist $(w_1 w_2)(m + i_2) = w_2(i_2) = a$.

4.1 Als letztes sei noch angemerkt, dass man an der Definition sofort sieht:

$$\forall w_1 \in A^* \; \forall w_2 \in A^* : |w_1 w_2| = |w_1| + |w_2|$$

4.4.1 *Konkatenation mit dem leeren Wort*

Gefragt, was des Besondere an der Zahl Null ist, antworten zumindest manche Leute, dass es die Eigenschaft hat:

$$\forall x \in \mathbb{N}_0 : x + 0 = x \wedge 0 + x = x$$

Man sagt auch, die Null sei das *neutrale Element* bezüglich der Addition. *neutrales Element*

Etwas Ähnliches wie die Null für natürliche Zahlen gibt es bei Wörtern: Das leere Wort ist das neutrale Element bezüglich Konkatenation.

4.2 **Lemma.** Für jedes Alphabet A gilt:

$$\forall w \in A^* : w \cdot \varepsilon = w \wedge \varepsilon \cdot w = w \; .$$

Anschaulich ist das wohl klar: Wenn man ein Wort w nimmt und hinten dran der Reihe nach noch alle Symbole des leeren Wortes „klebt“, dann „ändert sich an w nichts“.

Aber da wir auch eine formale Definition von Wörtern haben, können wir das auch präzise beweisen ohne auf Anführungszeichen und „ist doch wohl klar“ zurückgreifen zu müssen. Wie weiter vorne schon einmal erwähnt: Wir machen das nicht, um Einfaches besonders schwierig darzustellen (so etwas hat Herr Gauß gemacht …), sondern um an einem einfachen Beispiel etwas zu üben, was Sie durch Ihr ganzes Studium begleiten wird: Beweisen.

4.3 **Beweis.** Die erste Frage, die sich stellt, ist: Wie beweist man das für alle denkbaren(?) Alphabete A? Eine Möglichkeit ist: Man geht von einem wie man sagt „beliebigen aber festen“ Alphabet A aus, über das man *keinerlei* Annahmen macht und zeigt, dass die Aussage für dieses A gilt.

Damit stellt sich die zweite Frage: Wie beweist man, dass die Behauptung für alle $w \in A^*$ gilt? Im vorliegenden Fall funktioniert das gleiche Vorgehen wieder: Man geht von einem beliebigen Wort w aus, über das man keinerlei Annahmen macht.

Sei also $w \in A^*$, d. h. eine surjektive Abbildung $w : \mathbb{G}_m \to B$ mit $B \subseteq A$.

Außerdem ist $\varepsilon : \mathbb{G}_0 \to \{\}$.

Um herauszufinden, was $w' = w \cdot \varepsilon$ ist, können wir nun einfach losrechnen: Wir nehmen die formale Definition der Konkatenation und setzen unsere „konkreten“ Werte ein. Dann ist also w' eine Abbildung $w' : \mathbb{G}_{m+0} \to B \cup \{\}$, also schlicht w' :

$\mathbb{G}_m \to B$. Und für alle $i \in \mathbb{G}_m$ gilt für die Funktionswerte laut der formalen Definition von Konkatenation für alle $i \in \mathbb{G}_m$:

$$\begin{aligned} w'(i) &= \begin{cases} w_1(i) & \text{falls } 0 \leqslant i < m \\ w_2(i-m) & \text{falls } m \leqslant i < m+n \end{cases} \\ &= \begin{cases} w(i) & \text{falls } 0 \leqslant i < m \\ \varepsilon(i-m) & \text{falls } m \leqslant i < m+0 \end{cases} \\ &= w(i) \end{aligned}$$

Also haben w und w' die gleichen Definitions- und Zielbereiche und für alle Argumente die gleichen Funktionswerte, d. h. an allen Stellen die gleichen Symbole. Also ist $w' = w$. ■

4.4.2 *Eigenschaften der Konkatenation*

Wenn man eine neue binäre Operation definiert, stellt sich immer die Frage nach möglichen Rechenregeln. Weiter oben haben wir schon darauf hingewiesen, dass man bei der Konkatenation von Wörtern nicht einfach die Reihenfolge vertauschen darf. (Man sagt auch, die Konkatenation sei *nicht kommutativ*.)

Was ist, wenn man mehrere Wörter konkateniert? Ist für jedes Alphabet A und alle Wörter w_1, w_2 und w_3 aus A^* stets

$$(w_1 \cdot w_2) \cdot w_3 = w_1 \cdot (w_2 \cdot w_3) \text{ ?}$$

Die Antwort ist: Ja. Auch das kann man stur nachrechnen.

Das bedeutet, dass man bei der Konkatenation mehrerer Wörter keine Klammern setzen muss. Man sagt auch, die Konkatenation sei eine *assoziative Operation* (siehe Unterabschnitt 4.5).

4.4.3 *Iterierte Konkatenation*

Von den Zahlen kennen Sie die Potenzschreibweise x^3 für $x \cdot x \cdot x$ usw. Das wollen wir nun auch für die Konkatenation von Wörtern einführen. Die Idee ist so etwas wie

$$w^k = \underbrace{w \cdot w \cdots w}_{\text{k mal}}$$

Aber da stehen wieder diese Pünktchen ... Wie kann man die vermeiden? Was ist mit $k = 1$ (immerhin stehen da ja drei w auf der rechten Seite)? Und was soll man sich für $k = 0$ vorstellen?

induktive Definition

Potenzen von Wörtern

Ein möglicher Ausweg ist eine sogenannte *induktive Definition*. Für *Potenzen von Wörtern* geht das so:

$$\begin{aligned} w^0 &= \varepsilon \\ \forall k \in \mathbb{N}_0 : \; w^{k+1} &= w^k \cdot w \end{aligned}$$

Man definiert also

- explizit, was ein Exponent 0 bedeuten soll: $w^0 = \varepsilon$. (Es hat sich als nützlich erwiesen, das so festzulegen.)

- wie man w^{n+1} ausrechnen kann, wenn man schon w^n kennt.

Damit kann man z. B. ausrechnen, was w^1 ist:

$$w^1 = w^{0+1} = w^0 \cdot w = \varepsilon \cdot w = w$$

Und dann:

$$w^2 = w^{1+1} = w^1 \cdot w = w \cdot w$$

Und so weiter.

4.4 **Lemma.** Für jedes Alphabet A, jedes Wort $w \in A^*$ und jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$|w^n| = n|w| \; .$$

Wie kann man das beweisen? Immer wenn in einer Aussage „etwas“ eine Rolle spielt, das induktiv definiert wurde, sollte man in Erwägung ziehen, für den Beweis *vollständige Induktion* zu benutzen. *vollständige Induktion*

Sehen wir uns mal ein paar einfache Fälle an:

- $n = 0$: Das ist einfach: $|w^0| = |\varepsilon| = 0 = 0 \cdot |w|$.
- $n = 1$: Natürlich könnten wir einfach oben nachsehen, dass $w^1 = w$ ist, und folgern $|w^1| = |w|$. Oder wir wiederholen im wesentlichen die obige Rechnung:

$$\begin{aligned} |w^1| = |w^{0+1}| &= |w^0 \cdot w| \\ &= |w^0| + |w| && \text{siehe Punkt 4.1} \\ &= 0|w| + |w| && \text{siehe Fall } n = 0 \\ &= 1|w| \end{aligned}$$

  Man kann auch sagen: Weil die Behauptung für $n = 0$ richtig war, konnten wir sie auch für $n = 1$ beweisen.
- $n = 2$: Wir gehen analog zu eben vor:

$$\begin{aligned} |w^2| = |w^{1+1}| &= |w^1 \cdot w| \\ &= |w^1| + |w| && \text{siehe Punkt 4.1} \\ &= 1|w| + |w| && \text{siehe Fall } n = 1 \\ &= 2|w| \end{aligned}$$

  Man kann auch sagen: Weil die Behauptung für $n = 1$ richtig war, konnten wir sie auch für $n = 2$ beweisen.
- Sie erkennen nun wohl das Muster: Weil w^{n+1} mit Hilfe von w^n definiert wurde, kann man aus der Richtigkeit der Behauptung für $|w^n|$ die für $|w^{n+1}|$ folgern.
- Also gilt das folgende: Wenn wir mit M die Menge aller natürlichen Zahlen n bezeichnen, für die die Behauptung $|w^n| = n|w|$ gilt, dann wissen wir also:
  1. $0 \in M$
  2. $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \; (n \in M \Rightarrow n + 1 \in M)$

- Es ist ein Faktum der Mathematik, dass eine Menge M, die nur natürliche Zahlen enthält und die Eigenschaften 1 und 2 von eben hat, gerade die Menge $\mathbb{N}_0$ ist. (Wenn man die natürlichen Zahlen axiomatisch definiert, ist das sogar gerade eine der Forderungen.) Auf der genannten Tatsache fußt das Beweisprinzip der *vollständigen Induktion*, das wir nun erst einmal in der einfachsten Form vorführen. *vollständige Induktion*

4.5 **Beweis.** Wir schreiben nun im wesentlichen noch einmal das gleiche wie oben in der für Induktionsbeweise üblichen Form auf:

INDUKTIONSANFANG $n = 0$: Zu zeigen ist: $|w^0| = 0 \cdot |w|$. Das geht ganz ausführlich aufgeschrieben so:

$$\begin{aligned} |w^0| &= |\varepsilon| && \text{nach Defintion von } w^0 \\ &= 0 = 0 \cdot |w| \ . \end{aligned}$$

INDUKTIONSSCHRITT $n \to n+1$: Zu zeigen ist: Für alle n gilt: Wenn $|w^n| = n|w|$ ist, dann ist auch $|w^{n+1}| = (n+1)|w|$.

Wie kann man zeigen, dass eine Aussage für *alle* natürlichen Zahlen n gilt? Eine Möglichkeit ist jedenfalls, von einem „beliebigen, aber festen“ n auszugehen und für „dieses“ n zu zeigen: $|w^n| = n|w| \Rightarrow |w^{n+1}| = (n+1)|w|$.

Mit anderen Worten macht man nun für ein beliebiges aber festes n die

INDUKTIONSANNAHME ODER INDUKTIONSVORAUSSETZUNG: $|w^n| = n|w|$.

Zu leisten ist nun mit Hilfe dieser Annahme der Nachweis, dass auch $|w^{n+1}| = (n+1)|w|$. Das nennt man den

INDUKTIONSSCHLUSS: In unserem Fall:

$$\begin{aligned} |w^{n+1}| &= |w^n \cdot w| \\ &= |w^n| + |w| \\ &= n|w| + |w| && \text{nach Induktionsannahme} \\ &= (n+1)|w| \end{aligned}$$

■

Zusammenfassend wollen wir noch einmal festhalten, dass das Prinzip der vollständigen Induktion auf der folgenden Tatsache beruht:

4.6 Wenn man für eine Aussage $\mathcal{A}(n)$, die von einer Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ abhängt, weiß

$$\begin{array}{rc} \text{es gilt} & \mathcal{A}(0) \\ \text{und es gilt} & \forall n \in \mathbb{N}_0 : (\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)) \end{array}$$

dann gilt auch:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ \mathcal{A}(n) \ .$$

4.5 binäre operationen

Unter einer binären Operation auf einer Menge M versteht man eine Abbildung $f : M \times M \to M$. Üblicherweise benutzt man aber ein „Operationssysymbol" wie das Pluszeichen oder den Multiplikationspunkt und setzt ihn zwischen die Argumente: Statt $+(3, 8) = 11$ schreibt man normalerweise $3 + 8 = 11$.

Allgemein heißt eine binäre Operation $\diamond : M \times M \to M$ genau dann *kommutativ*, wenn gilt:

kommutative Operation

$$\forall x \in M \; \forall y \in M : x \diamond y = y \diamond x \; .$$

Eine binäre Operation $\diamond : M \times M \to M$ nennt man genau dann *assoziativ*, wenn gilt:

assoziative Operation

$$\forall x \in M \; \forall y \in M \; \forall z \in M : (x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z) \; .$$

4.6 zusammenfassung

In dieser Einheit wurde eingeführt, was wir unter einem *Wort* verstehen wollen, und wie *Konkatenation* und *Potenzen* von Wörtern definiert sind.

Als wichtiges technisches Hilfsmittel haben wir Beispiele *induktiver Defintionen* gesehen und das Beweisprinzip der *vollständigen Induktion*.