

Grundbegriffe der Informatik

Einheit 17: Relationen

Thomas Worsch

Universität Karlsruhe, Fakultät für Informatik

Wintersemester 2008/2009

Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniiertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Grundlegende Definitionen

„Extreme“ Elemente

Vollständige Halbordnungen

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

Ordnungen

Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Grundlegende Definitionen

„Extreme“ Elemente

Vollständige Halbordnungen

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

Ordnungen



Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniiertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Grundlegende Definitionen

„Extreme“ Elemente

Vollständige Halbordnungen

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

Ordnungen

- ▶ Eine *Äquivalenzrelation* ist eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf einer Menge M , die
 - ▶ reflexiv,
 - ▶ symmetrisch und
 - ▶ transitiv

ist.

- ▶ typischerweise
 - ▶ Notation \equiv , \sim , \approx , oder ähnlich
 - ▶ Infixschreibweise
- ▶ also
 - ▶ $\forall x \in M : x \equiv x$,
 - ▶ $\forall x \in M : \forall y \in M : x \equiv y \implies y \equiv x$
 - ▶ $\forall x \in M : \forall y \in M : \forall z \in M : x \equiv y \wedge y \equiv z \implies x \equiv z$

$\text{Id} = \{(x, x) \mid x \in M\}$ ist Äquivalenzrelation (für jede Menge M),
denn

- ▶ $\forall x \in M : x = x$,
- ▶ $\forall x \in M : \forall y \in M : x = y \implies y = x$
- ▶ $\forall x \in M : \forall y \in M : \forall z \in M : x = y \wedge y = z \implies x = z$

- ▶ Es sei $n \in \mathbb{N}_+$.
- ▶ $x, y \in \mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo n* , wenn
 - ▶ die Differenz $x - y$ durch n teilbar,
 - ▶ also ein ganzzahliges Vielfaches von n , ist.
- ▶ Schreibweise $x \equiv y \pmod{n}$
- ▶ Das sind Äquivalenzrelationen, denn
 - ▶ Reflexivität: $x - x = 0$ ist Vielfaches von n
 - ▶ Symmetrie: mit $x - y$ ist auch $y - x = -(x - y)$ Vielfaches von n
 - ▶ Transitivität:
 - ▶ Wenn $x - y = k_1 n$ und $y - z = k_2 n$ (mit $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$),
 - ▶ dann auch $x - z = (x - y) + (y - z) = (k_1 + k_2)n$ ganzzahliges Vielfaches von n

Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniiertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Grundlegende Definitionen

„Extreme“ Elemente

Vollständige Halbordnungen

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

Ordnungen

- ▶ durchgehendes Beispiel
- ▶ $L \subseteq A^*$ beliebige formale Sprache
- ▶ *Äquivalenzrelation von Nerode* \equiv_L auf der Menge A^* aller Wörter so definiert: für alle $w_1, w_2 \in A^*$ ist

$$w_1 \equiv_L w_2 \iff (\forall w \in A^* : w_1 w \in L \iff w_2 w \in L)$$

- ▶ das muss man erfahrungsgemäß mehrfach lesen
- ▶ w_1 und w_2 genau dann äquivalent, wenn gilt:
Gleich, welches Wort $w \in A^*$ man die beiden anhängt, immer sind entweder beide, $w_1 w$ und $w_2 w$, in L , oder keines. Aber ist eines in L und das andere nicht.
- ▶ Anders gesagt: w_1 und w_2 genau dann *nicht* \equiv_L -äquivalent, wenn es ein Wort $w \in A^*$ gibt, so dass genau eines der Wörter $w_1 w$ und $w_2 w$ in L liegt, aber das andere nicht.

- ▶ betrachte das leere Wort $w = \varepsilon$
- ▶ wenn $w_1 \equiv_L w_2$
- ▶ dann beide Wörter $w_1 w$ und $w_2 w$ in L oder beide nicht in L
- ▶ also beide Wörter w_1 und w_2 in L oder beide nicht in L

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \langle a^*b^* \rangle \subset A^*$
alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt
- ▶ Beispiele:
 1. $w_1 = aaa$ und $w_2 = a$
 - ▶ Hängt man an beide Wörter ein $w \in \langle a^* \rangle$ an, dann sind sowohl w_1w als auch w_2w in L .
 - ▶ Hängt man ein $w \in \langle a^*bb^* \rangle$ an, dann sind sowohl w_1w als auch w_2w in L .
 - ▶ Hängt man ein w an, das ba enthält, dann sind also beide nicht in L .
 - ▶ Andere Möglichkeiten für w gibt es nicht, also sind die beiden Wörter \equiv_L -äquivalent.
 2. $w_1 = aaab$ und $w_2 = abb$
 3. $w_1 = aa$ und $w_2 = abb$
 4. $w_1 = aba$ und $w_2 = babb$
 5. $w_1 = ab$ und $w_2 = ba$

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \langle a^*b^* \rangle \subset A^*$
alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt
- ▶ Beispiele:
 1. $w_1 = aaa$ und $w_2 = a$: äquivalent
 2. $w_1 = aaab$ und $w_2 = abb$
 - ▶ Hängt man ein $w \in \langle b^* \rangle$ an,
dann sind sowohl w_1w als auch w_2w in L .
 - ▶ Hängt man ein w an, das ein a enthält,
dann sind also beide nicht in L .
 - ▶ Andere Möglichkeiten gibt es nicht,
also sind die beiden Wörter \equiv_L -äquivalent.
 3. $w_1 = aa$ und $w_2 = abb$
 4. $w_1 = aba$ und $w_2 = babb$
 5. $w_1 = ab$ und $w_2 = ba$

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \langle a^*b^* \rangle \subset A^*$
alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt
- ▶ Beispiele:
 1. $w_1 = aaa$ und $w_2 = a$: äquivalent
 2. $w_1 = aaab$ und $w_2 = abb$: äquivalent
 3. $w_1 = aa$ und $w_2 = abb$
 - ▶ Hängt man $w = a$ an,
dann ist zwar $w_1w = aaa \in L$, aber $w_2w = abba \notin L$.
 - ▶ Also sind die beiden Wörter *nicht* \equiv_L -äquivalent.
 4. $w_1 = aba$ und $w_2 = babb$
 5. $w_1 = ab$ und $w_2 = ba$

▶ $A = \{a, b\}$

▶ $L = \langle a^*b^* \rangle \subset A^*$

alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort **ba** vorkommt

▶ Beispiele:

1. $w_1 = aaa$ und $w_2 = a$: äquivalent

2. $w_1 = aaab$ und $w_2 = abb$: äquivalent

3. $w_1 = aa$ und $w_2 = abb$: nicht äquivalent

4. $w_1 = aba$ und $w_2 = babb$

▶ Beide **ba**. Egal was man anhängt, es bleibt so, d. h. immer sind $w_1w \notin L$ und $w_2w \notin L$.

▶ Also sind die beiden Wörter \equiv_L -äquivalent.

5. $w_1 = ab$ und $w_2 = ba$

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \langle a^*b^* \rangle \subset A^*$
alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt
- ▶ Beispiele:
 1. $w_1 = aaa$ und $w_2 = a$: äquivalent
 2. $w_1 = aaab$ und $w_2 = abb$: äquivalent
 3. $w_1 = aa$ und $w_2 = abb$: nicht äquivalent
 4. $w_1 = aba$ und $w_2 = babb$: äquivalent
 5. $w_1 = ab$ und $w_2 = ba$
 - ▶ Da $w_1 \in L$, aber $w_2 \notin L$,
zeigt $w = \varepsilon$, dass die beiden nicht \equiv_L -äquivalent sind.

▶ $A = \{a, b\}$

▶ $L = \langle a^*b^* \rangle \subset A^*$

alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort **ba** vorkommt

▶ Beispiele:

1. $w_1 = aaa$ und $w_2 = a$: äquivalent
2. $w_1 = aaab$ und $w_2 = abb$: äquivalent
3. $w_1 = aa$ und $w_2 = abb$: nicht äquivalent
4. $w_1 = aba$ und $w_2 = babb$: äquivalent
5. $w_1 = ab$ und $w_2 = ba$: nicht äquivalent

Lemma

Für jede formale Sprache L ist \equiv_L eine Äquivalenzrelation.

Beweis

prüfe alle drei Eigenschaften:

- ▶ Reflexivität: Ist $w_1 \in A^*$, dann gilt für jedes $w \in A^*$ offensichtlich: $w_1 w \in L \iff w_1 w \in L$.
- ▶ Symmetrie: Für $w_1, w_2 \in A^*$ und alle $w \in A^*$ gelte: $w_1 w \in L \iff w_2 w \in L$. Dann gilt offensichtlich auch immer $w_2 w \in L \iff w_1 w \in L$.
- ▶ Transitivität: Es seien $w_1, w_2, w_3 \in A^*$ und es möge gelten

$$\forall w \in A^* : w_1 w \in L \iff w_2 w \in L \quad (1)$$

$$\forall w \in A^* : w_2 w \in L \iff w_3 w \in L \quad (2)$$

Zeige: $\forall w \in A^* : w_1 w \in L \iff w_3 w \in L$

Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniiertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Grundlegende Definitionen

„Extreme“ Elemente

Vollständige Halbordnungen

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

Ordnungen

- ▶ *Äquivalenzklasse* von $x \in M$ ist $\{y \in M \mid x \equiv y\}$
- ▶ Schreibweise $[x]_{\equiv}$ oder einfach $[x]$, falls \equiv klar ist

- ▶ *Faktormenge* (oder *Faserung*) von M nach \equiv ist die Menge aller Äquivalenzklassen.
- ▶ Schreibweise $M/_{\equiv} = \{[x]_{\equiv} \mid x \in M\}$

- ▶ manchmal
- ▶ Beispiel: \equiv_L für $L = \langle a^*b^* \rangle$
- ▶ genauere Betrachtung der Argumentation von vorhin zeigt:
 - ▶ jedes Wort zu genau einem der Wörter ε , b und ba äquivalent
 - ▶ Also: $A^*_{/\equiv_L}$ besteht aus drei Äquivalenzklassen:
 - ▶ $[\varepsilon] = \langle a^* \rangle$
 - ▶ $[b] = \langle a^*bb^* \rangle$
 - ▶ $[ba] = \langle a^*bb^*a(a|b)^* \rangle$
- ▶ Wahl der Repräsentanten willkürlich; hätten auch schreiben können:
 - ▶ $[aaaaa] = \langle a^* \rangle$
 - ▶ $[aabbbbbb] = \langle a^*bb^* \rangle$
 - ▶ $[aabbaabbbba] = \langle a^*bb^*a(a|b)^* \rangle$

Anzahl Äquivalenzklassen bei Nerode-Äquivalenz

- ▶ durch L induzierte Nerode-Äquivalenz kann auch unendlich viele Äquivalenzklassen haben
- ▶ Beispiel betrachte man

$$L = \{a^k b^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}.$$

- ▶ Ist $k \neq m$, dann sind $w_1 = a^k$ und $w_2 = a^m$ nicht äquivalent
- ▶ wie man durch Anhängen von $w = b^k$ sieht:
 - ▶ $w_1 w = a^k b^k \in L$, aber
 - ▶ $w_2 w = a^m b^k \notin L$.
- ▶ Also zumindest jedes Wort a^k , $k \in \mathbb{N}_0$ in einer anderen Äquivalenzklasse.
- ▶ Jede dieser Äquivalenzklassen ist aber übrigens unendlich groß, denn

$$[a^k]_{\equiv_L} = \{a^x b^y \mid x, y \in \mathbb{N}_0 \wedge x - y = k\}$$

- ▶ Für die reguläre Sprache $L_1 = \langle a^*b^* \rangle$ hat \equiv_L endlich viele Äquivalenzklassen.
- ▶ Für die nicht reguläre Sprache $L_2 = \{a^k b^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ hat \equiv_L unendlich viele Äquivalenzklassen.

- ▶ Für L_1 gibt es einen endlichen Akzeptor,
- ▶ für L_2 gibt es keinen.

Das sollten Sie mitnehmen:

- ▶ Äquivalenzrelationen
- ▶ Beispiel Nerode-Äquivalenzen

Das sollten Sie üben:

- ▶ definierenden Eigenschaften überprüfen
- ▶ Anzahl Äquivalenzklassen bestimmen

Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniiertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Grundlegende Definitionen

„Extreme“ Elemente

Vollständige Halbordnungen

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

Ordnungen

- ▶ Beispiel: Kongruenz modulo n auf additiver Gruppe \mathbb{Z} (oder Ring \mathbb{Z})
- ▶ Frage: Wie ändern sich Funktionswerte, wenn man Argumente durch äquivalente ersetzt?

Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniiertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Grundlegende Definitionen

„Extreme“ Elemente

Vollständige Halbordnungen

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

Ordnungen

- ▶ Sei \equiv Äquivalenzrelation auf M und $f : M \rightarrow M$ eine Abbildung.
- ▶ \equiv ist mit f *verträglich*, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$x_1 \equiv x_2 \implies f(x_1) \equiv f(x_2) .$$

- ▶ Sei \equiv Äquivalenzrelation auf M und \square eine binäre Operation Menge M .
- ▶ \equiv ist mit \square *verträglich*, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ und alle $y_1, y_2 \in M$ gilt:

$$x_1 \equiv x_2 \wedge y_1 \equiv y_2 \implies x_1 \square y_1 \equiv x_2 \square y_2 .$$

- ▶ Äquivalenz „modulo n “.
- ▶ Diese Relationen sind mit Addition, Subtraktion und Multiplikation verträglich.
- ▶ Beispiel: ist

$$\begin{array}{ll} x_1 \equiv x_2 \pmod{n} & \text{also } x_1 - x_2 = kn \\ \text{und } y_1 \equiv y_2 \pmod{n} & \text{also } y_1 - y_2 = mn \end{array}$$

dann auch

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (k + m)n .$$

mit anderen Worten

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n} .$$

- ▶ Sei $w' \in A^*$ beliebig.
- ▶ Sei $f_{w'} : A^* \rightarrow A^*$ die Abbildung, die w' anhängt, also $f_{w'}(v) = vw'$.
- ▶ Behauptung: \equiv_L ist mit $f_{w'}$ verträglich ist, d. h.:

$$\forall w_1, w_2 \in A^* : w_1 \equiv_L w_2 \implies w_1 w' \equiv_L w_2 w'$$

- ▶ Zeige: Wenn $w_1 \equiv_L w_2$ ist, dann ist auch $w_1 w' \equiv_L w_2 w'$.
- ▶ Also: für *alle* $w \in A^*$ gelte $w_1 w \in L \iff w_2 w \in L$.
- ▶ Zeige: für alle $v \in A^*$ gilt: $(w_1 w')v \in L \iff (w_2 w')v \in L$.
für beliebiges $v \in A^*$ gilt:

$$\begin{aligned}(w_1 w')v \in L &\iff w_1(w'v) \in L \\ &\iff w_2(w'v) \in L && \text{weil } w_1 \equiv_L w_2 \\ &\iff (w_2 w')v \in L .\end{aligned}$$

Eine Äquivalenzrelation, die mit allen gerade interessierenden Funktionen oder/und Operationen verträglich ist, nennt man auch eine *Kongruenzrelation*.

Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniiertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Grundlegende Definitionen

„Extreme“ Elemente

Vollständige Halbordnungen

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

Ordnungen

Eine Abbildung für Nerode-Äquivalenzklassen (1)

- ▶ L eine beliebige formale Sprache $L \subseteq A^*$.
- ▶ für jedes $x \in A$ ist die Abbildung $f_x : A^* \rightarrow A^* : w \mapsto wx$ mit \equiv_L verträglich.
- ▶ Wir schreiben nun einmal hin:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \rightarrow A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

- ▶ Ist das in Ordnung?
- ▶ Huch? Wo kann ein Problem sein?

Eine Abbildung für Nerode-Äquivalenzklassen (1)

- ▶ L eine beliebige formale Sprache $L \subseteq A^*$.
- ▶ für jedes $x \in A$ ist die Abbildung $f_x : A^* \rightarrow A^* : w \mapsto wx$ mit \equiv_L verträglich.
- ▶ Wir schreiben nun einmal hin:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \rightarrow A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

- ▶ Ist das in Ordnung?
- ▶ Huch? Wo kann ein Problem sein?

Eine Abbildung für Nerode-Äquivalenzklassen (2)

- ▶ Versuch Abbildung zu definieren, die Äquivalenzklasse auf Äquivalenzklasse abbildet.
- ▶ Aber $[w]$ enthält ja im allgemeinen nicht nur w , sondern noch viele andere Wörter.
- ▶ Zum Beispiel hatten wir uns weiter vorne überlegt, dass im Fall $L = \langle a^*b^* \rangle$ die Wörter ε , a , a^2 , a^3 , usw. alle in einer Äquivalenzklasse liegen.
- ▶ also $[\varepsilon] = [a] = [a^2] = \dots$.
- ▶ damit $[w] \mapsto [wx]$ wirklich eine Definition ist, die für jedes Argument **eindeutig** einen Funktionswert festlegt,
- ▶ sollte bitte auch $[\varepsilon x] = [ax] = [a^2x] = \dots$ sein.
- ▶ Aha: Das sichert gerade die Verträglichkeitsbedingung zu!

$$w_1 \equiv_L w_2 \implies w_1x \equiv_L w_2x$$

$$\text{also } w_1 \equiv_L w_2 \implies f_x(w_1) \equiv_L f_x(w_2)$$

$$\text{also } [w_1] = [w_2] \implies [f_x(w_1)] = [f_x(w_2)]$$

Allgemein gilt: Wenn \equiv mit $f : M \rightarrow M$ verträglich ist, dann ist

$$f' : M_{/\equiv} \rightarrow M_{/\equiv} : f'([x]) = [f(x)]$$

wohldefiniert.

- ▶ sei L eine formale Sprache, für die \equiv_L nur endlich viele Äquivalenzklassen hat.
- ▶ schreibe abkürzend $Z = A^*/\equiv_L$

- ▶ definiere

$$f : Z \times A \rightarrow Z : f([w], x) = [wx]$$

- ▶ Diese Abbildung ist wohldefiniert.
- ▶ Die Erinnerung an endliche Akzeptoren ist kein Zufall.
- ▶ Legt man nämlich noch fest
 - ▶ $z_0 = [\varepsilon]$ und
 - ▶ $F = \{[w] \mid w \in L\}$
- ▶ dann hat man einen endlichen Akzeptor, der genau L erkennt.
- ▶ Überlegen Sie sich das!

Ohne Beweis nehme man bitte noch zu Kenntnis:

- ▶ Für jede reguläre Sprache hat \equiv_L nur endlich viele Äquivalenzklassen.
- ▶ Der gerade konstruierte Akzeptor ist unter allen, die L erkennen, einer mit minimaler Zustandszahl.
- ▶ Dieser endliche Akzeptor ist bis auf Isomorphie (also Umbenennung von Zuständen) sogar eindeutig.

Das sollten Sie mitnehmen:

- ▶ Kongruenzrelationen: Verträglichkeit
- ▶ induzierte Abbildungen/Operationen für Äquivalenzklassen
- ▶ Nerode-Äquivalenzen liefern minimale Akzeptoren

Das sollten Sie üben:

- ▶ mit Äquivalenzklassen rechnen

Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Grundlegende Definitionen

„Extreme“ Elemente

Vollständige Halbordnungen

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

Ordnungen

Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniiertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Grundlegende Definitionen

„Extreme“ Elemente

Vollständige Halbordnungen

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

Ordnungen

- ▶ Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *antisymmetrisch*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$xRy \wedge yRx \implies x = y$$

- ▶ Beispiel Mengeninklusion:

- ▶ zum Beispiel $M = 2^{M'}$ Potenzmenge einer Menge M'
- ▶ Relation

$$\begin{aligned} R &= \{(A, B) \mid A \subseteq M' \wedge B \subseteq M' \wedge A \subseteq B\} \\ &= \{(A, B) \mid A \in M \wedge B \in M \wedge A \subseteq B\} \\ &\subseteq M \times M \end{aligned}$$

- ▶ R ist antisymmetrisch:

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B$$

- ▶ Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *Halbordnung*, wenn sie
 - ▶ reflexiv,
 - ▶ antisymmetrisch und
 - ▶ transitivist.
- ▶ Wenn R Halbordnung auf Menge M ist, nennt man auch M eine *halbgeordnete Menge*.
- ▶ Beispiel Mengeninklusion:
 - ▶ $A \subseteq A$
 - ▶ $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B$
 - ▶ $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$
- ▶ Beachte: es gibt im allgemeinen unvergleichbare Elemente
 - ▶ z. B. $\{1, 2, 3\} \not\subseteq \{3, 4, 5\}$ und $\{3, 4, 5\} \not\subseteq \{1, 2, 3\}$

- ▶ Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *Halbordnung*, wenn sie
 - ▶ reflexiv,
 - ▶ antisymmetrisch und
 - ▶ transitivist.
- ▶ Wenn R Halbordnung auf Menge M ist, nennt man auch M eine *halbgeordnete Menge*.
- ▶ Beispiel Mengeninklusion:
 - ▶ $A \subseteq A$
 - ▶ $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B$
 - ▶ $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$
- ▶ Beachte: es gibt im allgemeinen unvergleichbare Elemente
 - ▶ z. B. $\{1, 2, 3\} \not\subseteq \{3, 4, 5\}$ und $\{3, 4, 5\} \not\subseteq \{1, 2, 3\}$

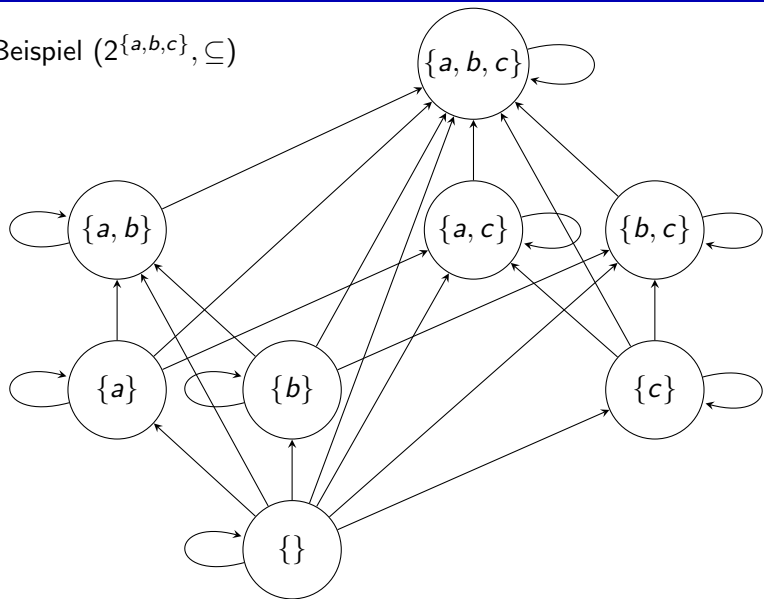
- ▶ Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *Halbordnung*, wenn sie
 - ▶ reflexiv,
 - ▶ antisymmetrisch und
 - ▶ transitivist.
- ▶ Wenn R Halbordnung auf Menge M ist, nennt man auch M eine *halbgeordnete Menge*.
- ▶ Beispiel Mengeninklusion:
 - ▶ $A \subseteq A$
 - ▶ $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B$
 - ▶ $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$
- ▶ Beachte: es gibt im allgemeinen unvergleichbare Elemente
 - ▶ z. B. $\{1, 2, 3\} \not\subseteq \{3, 4, 5\}$ und $\{3, 4, 5\} \not\subseteq \{1, 2, 3\}$

- ▶ $M = A^*$
- ▶ Relation \sqsubseteq_p auf A^* :

$$w_1 \sqsubseteq_p w_2 \iff \exists u \in A^* : w_1 u = w_2$$

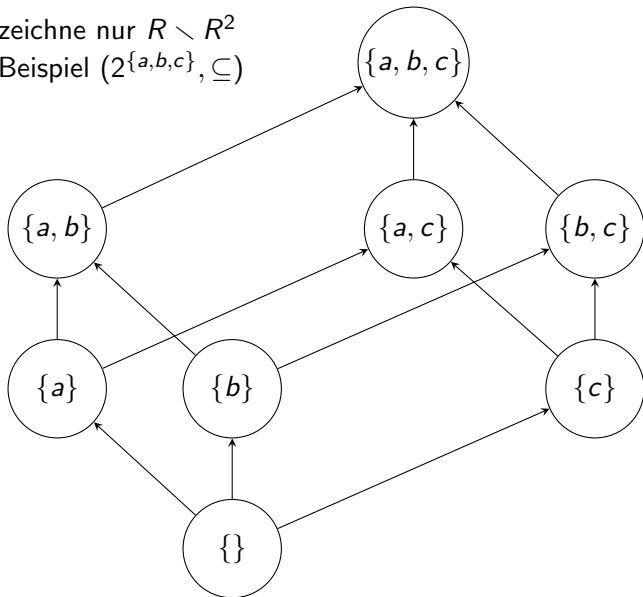
- ▶ zum Beispiel im Duden:
 - ▶ „Klaus“ kommt vor „Klausur“
- ▶ aber: \sqsubseteq_p ist echte *Halbordnung*
 - ▶ keine Beziehung zwischen *Klausur* und *Übung*

► Beispiel $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$



Darstellung von Halbordnungen (2): Hassediagramm

- ▶ zeichne nur $R \setminus R^2$
- ▶ Beispiel $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$



Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniiertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Grundlegende Definitionen

„Extreme“ Elemente

Vollständige Halbordnungen

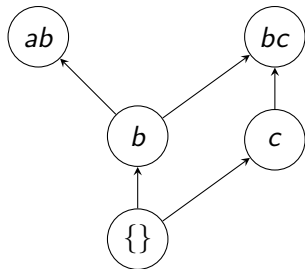
Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

Ordnungen

sei (M, \sqsubseteq) halbgeordnet und $T \subseteq M$.

- ▶ $x \in T$ heißt *minimales Element von T* ,
wenn es kein $y \in T$ gibt mit $y \sqsubseteq x$ und $y \neq x$.
- ▶ $x \in T$ heißt *maximales Element von T* ,
wenn es kein $y \in T$ gibt mit $x \sqsubseteq y$ und $x \neq y$.

- ▶ Teilmenge von $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$:

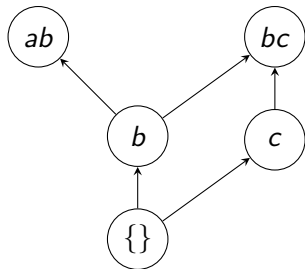


- ▶ zwei maximale Elemente: ab und bc
- ▶ ein minimales Element: $\{\}$

sei (M, \sqsubseteq) halbgeordnet und $T \subseteq M$.

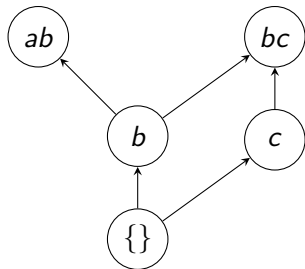
- ▶ $x \in T$ heißt *kleinstes Element von T* ,
wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y$.
- ▶ $x \in T$ heißt *größtes Element von T* ,
wenn für alle $y \in T$ gilt: $y \sqsubseteq x$.

- ▶ Teilmenge von $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$:



- ▶ kein größtes Element
- ▶ kleinstes Element: $\{\}$
- ▶ **Achtung:** Eine unendliche Teilmenge kann z. B. genau ein minimales Element haben und trotzdem kein kleinstes!

- ▶ Teilmenge von $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$:



- ▶ kein größtes Element
- ▶ kleinstes Element: $\{\}$
- ▶ **Achtung:** Eine unendliche Teilmenge kann z. B. genau ein minimales Element haben und trotzdem kein kleinstes!

sei (M, \sqsubseteq) halbgeordnet und $T \subseteq M$.

- ▶ T kann nicht zwei verschiedene kleinste (bzw. größte) Elemente haben.
- ▶ Beweis für Eindeutigkeit des kleinsten Elements
 - ▶ seien x_1 und x_2 kleinste Elemente,
 - ▶ dann ist $x_1 \sqsubseteq x_2$, weil x_1 kleinstes Element,
 - ▶ und es ist $x_2 \sqsubseteq x_1$, weil x_2 kleinstes Element,
 - ▶ also wegen Antisymmetrie: $x_1 = x_2$
- ▶ Beweis für Eindeutigkeit des größten Elements analog

sei (M, \sqsubseteq) halbgeordnet und $T \subseteq M$.

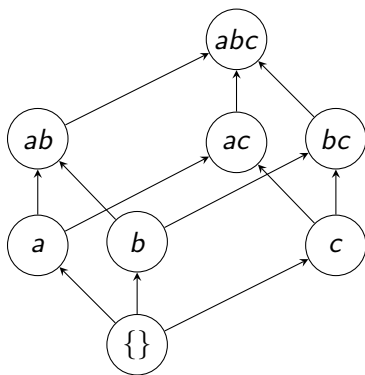
- ▶ $x \in M$ heißt *obere Schranke von T* ,
wenn für alle $y \in T$ gilt: $y \sqsubseteq x$.
- ▶ $x \in M$ heißt *untere Schranke von T* ,
wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y$.

- ▶ Beachte: untere und obere Schranken von T dürfen
außerhalb von T liegen.

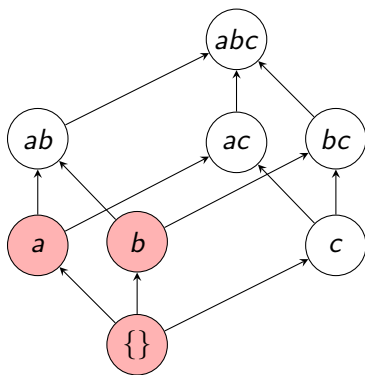
sei (M, \sqsubseteq) halbgeordnet und $T \subseteq M$.

- ▶ $x \in M$ heißt *obere Schranke von T* ,
wenn für alle $y \in T$ gilt: $y \sqsubseteq x$.
- ▶ $x \in M$ heißt *untere Schranke von T* ,
wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y$.

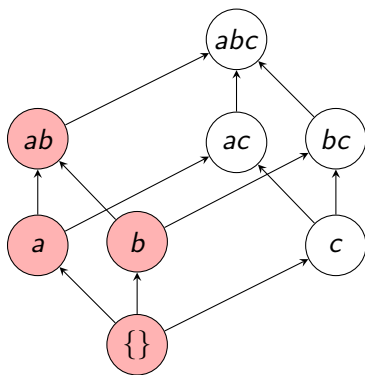
- ▶ Beachte: untere und obere Schranken von T dürfen
außerhalb von T liegen.



- ▶ Standardbeispiel:
- ▶ $T = \{\{\}, \{a\}, \{b\}\}$: obere Schranken $\{a, b\}$ und $\{a, b, c\}$.
- ▶ $T = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$: die gleichen oberen Schranken.




- ▶ Standardbeispiel:
- ▶ $T = \{\{\}, \{a\}, \{b\}\}$: obere Schranken $\{a, b\}$ und $\{a, b, c\}$.
- ▶ $T = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$: die gleichen oberen Schranken.




- ▶ Standardbeispiel:
- ▶ $T = \{\{\}, \{a\}, \{b\}\}$: obere Schranken $\{a, b\}$ und $\{a, b, c\}$.
- ▶ $T = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$: die gleichen oberen Schranken.

- ▶ Teilmenge muss keine obere Schranke besitzen

- ▶ In  besitzt z. B. die Gesamtmenge keine obere Schranke.

- ▶ In (\mathbb{N}_0, \leq) besitzt die die Gesamtmenge keine obere Schranke.

- ▶ Teilmenge muss keine obere Schranke besitzen

- ▶ In  besitzt z. B. die Gesamtmenge keine obere Schranke.

- ▶ In (\mathbb{N}_0, \leq) besitzt die die Gesamtmenge keine obere Schranke.

- ▶ Besitzt die Menge aller oberen Schranken einer Teilmenge T ein kleinstes Element, so heißt dies das *Supremum von T*
 - ▶ Schreibweisen $\sqcup T$ oder $\sup(T)$
- ▶ Besitzt die Menge aller unteren Schranken einer Teilmenge T ein größtes Element, so heißt dies das *Infimum von T* .
 - ▶ brauchen wir hier nicht
- ▶ Supremum (bzw. Infimum) einer Teilmenge müssen nicht existieren
 - ▶ weil gar keine oberen Schranken vorhanden oder
 - ▶ weil von den oberen Schranken keine die kleinste ist

- ▶ Besitzt die Menge aller oberen Schranken einer Teilmenge T ein kleinstes Element, so heißt dies das *Supremum von T*
 - ▶ Schreibweisen $\sqcup T$ oder $\sup(T)$
- ▶ Besitzt die Menge aller unteren Schranken einer Teilmenge T ein größtes Element, so heißt dies das *Infimum von T* .
 - ▶ brauchen wir hier nicht
- ▶ Supremum (bzw. Infimum) einer Teilmenge müssen nicht existieren
 - ▶ weil gar keine oberen Schranken vorhanden oder
 - ▶ weil von den oberen Schranken keine die kleinste ist

- ▶ Bei Halbordnungen $(2^{M'}, \subseteq)$ existieren Suprema immer:
 - ▶ Supremum von $T \subseteq 2^{M'}$ ist die Vereinigung aller Teilmengen von M' , die in T liegen
- ▶ Beispiel für das Beispiel:
 - ▶ $M' = \{a, b\}^*$
 - ▶ also ist $M = 2^{M'}$ die Menge aller formalen Sprachen $L \subseteq M'$
 - ▶ für $i \in \mathbb{N}_0$ sei $L_i = \{a^j b^j \mid j \leq i\}$
 - ▶ $L_0 = \{\varepsilon\}$
 - ▶ $L_1 = \{\varepsilon, ab\}$
 - ▶ $L_2 = \{\varepsilon, ab, aabb\}$
 - ▶ ...
 - ▶ sei $T = \{L_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$
 - ▶ dann ist $\bigsqcup T = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$

Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniiertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Grundlegende Definitionen

„Extreme“ Elemente

Vollständige Halbordnungen

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

Ordnungen

▶ *aufsteigende Kette*

- ▶ abzählbar unendliche Folge (x_0, x_1, x_2, \dots) von Elementen
- ▶ mit der Eigenschaft: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : x_i \sqsubseteq x_{i+1}$.
- ▶ kurz

$$x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \dots$$

▶ Beispiel: $(2^{\{a,b\}^*}, \subseteq)$

$$\{\varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon, ab\} \subseteq \{\varepsilon, ab, aabb\} \subseteq \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb\} \dots$$

▶ *aufsteigende Kette*

- ▶ abzählbar unendliche Folge (x_0, x_1, x_2, \dots) von Elementen
- ▶ mit der Eigenschaft: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : x_i \sqsubseteq x_{i+1}$.
- ▶ kurz

$$x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \dots$$

▶ Beispiel: $(2^{\{a,b\}^*}, \subseteq)$

$$\{\varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon, ab\} \subseteq \{\varepsilon, ab, aabb\} \subseteq \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb\} \dots$$

- ▶ Eine Halbordnung heißt *vollständig*, wenn
 - ▶ sie ein **kleinstes Element** \perp hat und
 - ▶ **jede aufsteigende Kette** $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots$ ein **Supremum** $\bigsqcup_i x_i$ besitzt.

- ▶ Beispiele: $(2^{M'}, \sqsubseteq)$
 - ▶ kleinstes Element $\{\}$
 - ▶ Supremum von $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots$ ist $\bigcup T_i$.

- ▶ Eine Halbordnung heißt *vollständig*, wenn
 - ▶ sie ein **kleinstes Element** \perp hat und
 - ▶ **jede aufsteigende Kette** $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots$ ein **Supremum** $\bigsqcup_i x_i$ besitzt.

- ▶ Beispiele: $(2^{M'}, \subseteq)$
 - ▶ kleinstes Element $\{\}$
 - ▶ Supremum von $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots$ ist $\bigcup T_i$.

- ▶ (\mathbb{N}_0, \leq) ist *keine* vollständige Halbordnung
 - ▶ unbeschränkt wachsende aufsteigende Ketten wie z. B. $0 \leq 1 \leq 2 \leq \dots$ besitzen kein Supremum in \mathbb{N}_0 .
- ▶ Ergänze weiteres Element u „über“ allen Zahlen:
 - ▶ $N = \mathbb{N}_0 \cup \{u\}$ und
 - ▶ $x \sqsubseteq y \iff (x, y \in \mathbb{N}_0 \wedge x \leq y) \vee (y = u)$
 - ▶ also sozusagen

$$0 \sqsubseteq 1 \sqsubseteq 2 \sqsubseteq 3 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq u$$

- ▶ später noch nützlich
 - ▶ $N' = \mathbb{N}_0 \cup \{u_1, u_2\}$ und
 - ▶ $x \sqsubseteq y \iff (x, y \in \mathbb{N}_0 \wedge x \leq y) \vee (x \in \mathbb{N}_0 \cup \{u_1\} \wedge y = u_1) \vee y = u_2$
 - ▶ also sozusagen

$$0 \sqsubseteq 1 \sqsubseteq 2 \sqsubseteq 3 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq u_1 \sqsubseteq u_2$$

Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniiertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Grundlegende Definitionen

„Extreme“ Elemente

Vollständige Halbordnungen

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

Ordnungen

- ▶ \sqsubseteq eine Halbordnung auf einer Menge M .
- ▶ Abbildung $f : M \rightarrow M$ *monoton*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$x \sqsubseteq y \implies f(x) \sqsubseteq f(y)$$

- ▶ Beispiel: (\mathbb{N}_0, \leq) mit Abbildung $f(x) = x + 1$
 - ▶ $x \leq y \implies x + 1 \leq y + 1$
- ▶ Nichtbeispiel: (\mathbb{N}_0, \leq) mit Abbildung $f(x) = x \bmod 5$
 - ▶ $3 \leq 10$, aber $f(3) = 3 \not\leq 0 = f(10)$.

- ▶ \sqsubseteq eine Halbordnung auf einer Menge M .
- ▶ Abbildung $f : M \rightarrow M$ *monoton*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$x \sqsubseteq y \implies f(x) \sqsubseteq f(y)$$

- ▶ Beispiel: (\mathbb{N}_0, \leq) mit Abbildung $f(x) = x + 1$
 - ▶ $x \leq y \implies x + 1 \leq y + 1$
- ▶ Nichtbeispiel: (\mathbb{N}_0, \leq) mit Abbildung $f(x) = x \bmod 5$
 - ▶ $3 \leq 10$, aber $f(3) = 3 \not\leq 0 = f(10)$.

- ▶ (D, \sqsubseteq) sei vollständige Halbordnung
- ▶ Abbildung $f : D \rightarrow D$ heißt *stetig*,
wenn für jede aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots$ gilt:

$$f\left(\bigsqcup_i x_i\right) = \bigsqcup_i f(x_i)$$

- ▶ $N' = \mathbb{N}_0 \cup \{u_1, u_2\}$ mit \sqsubseteq wie eben
- ▶ Abbildung $f : N' \rightarrow N'$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_1 & \text{falls } x = u_1 \\ u_2 & \text{falls } x = u_2 \end{cases}$$

ist stetig.

- ▶ warum?

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_j & \text{falls } x = u_j \quad (\text{für } j = 1, 2) \end{cases}$$

Zwei Fälle für aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots$:

1. Die Kette wird konstant.

- ▶ also $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \dots = n'$.
- ▶ also jedenfalls $\bigsqcup_i x_i = n'$; zwei Unterfälle:
 - ▶ Wenn $n' = u_j$ ist, dann ist wegen $f(u_j) = u_j$ ist auch $\bigsqcup_i f(x_i) = u_j$, also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
 - ▶ Wenn $n' \in \mathbb{N}_0$ ist, dann ist $f(\bigsqcup_i x_i) = f(n') = n' + 1$. Andererseits ist die Kette der Funktionswerte $f(x_0) \sqsubseteq f(x_1) \sqsubseteq f(x_2) \sqsubseteq \dots \sqsubseteq f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2}) = \dots = f(n') = n' + 1$. Also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

2. Die Kette wird nicht konstant.

- ▶ dann alle $x_i \in \mathbb{N}_0$ und die Kette wächst unbeschränkt
- ▶ gleiches gilt für Kette der Funktionswerte.
- ▶ Also haben beide Ketten Supremum u_1 und wegen $f(u_1) = u_1$ ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_j & \text{falls } x = u_j \quad (\text{für } j = 1, 2) \end{cases}$$

Zwei Fälle für aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots$:

1. Die Kette wird konstant.

- ▶ also $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \dots = n'$.
- ▶ also jedenfalls $\bigsqcup_i x_i = n'$; zwei Unterfälle:
 - ▶ Wenn $n' = u_j$ ist, dann ist wegen $f(u_j) = u_j$ ist auch $\bigsqcup_i f(x_i) = u_j$, also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
 - ▶ Wenn $n' \in \mathbb{N}_0$ ist, dann ist $f(\bigsqcup_i x_i) = f(n') = n' + 1$. Andererseits ist die Kette der Funktionswerte $f(x_0) \sqsubseteq f(x_1) \sqsubseteq f(x_2) \sqsubseteq \dots \sqsubseteq f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2}) = \dots = f(n') = n' + 1$. Also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

2. Die Kette wird nicht konstant.

- ▶ dann alle $x_i \in \mathbb{N}_0$ und die Kette wächst unbeschränkt
- ▶ gleiches gilt für Kette der Funktionswerte.
- ▶ Also haben beide Ketten Supremum u_1 und wegen $f(u_1) = u_1$ ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_j & \text{falls } x = u_j \quad (\text{für } j = 1, 2) \end{cases}$$

Zwei Fälle für aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots$:

1. Die Kette wird konstant.

- ▶ also $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \dots = n'$.
- ▶ also jedenfalls $\bigsqcup_i x_i = n'$; zwei Unterfälle:
 - ▶ Wenn $n' = u_j$ ist, dann ist wegen $f(u_j) = u_j$ ist auch $\bigsqcup_i f(x_i) = u_j$, also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
 - ▶ Wenn $n' \in \mathbb{N}_0$ ist, dann ist $f(\bigsqcup_i x_i) = f(n') = n' + 1$. Andererseits ist die Kette der Funktionswerte $f(x_0) \sqsubseteq f(x_1) \sqsubseteq f(x_2) \sqsubseteq \dots \sqsubseteq f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2}) = \dots = f(n') = n' + 1$. Also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

2. Die Kette wird nicht konstant.

- ▶ dann alle $x_i \in \mathbb{N}_0$ und die Kette wächst unbeschränkt
- ▶ gleiches gilt für Kette der Funktionswerte.
- ▶ Also haben beide Ketten Supremum u_1 und wegen $f(u_1) = u_1$ ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_j & \text{falls } x = u_j \quad (\text{für } j = 1, 2) \end{cases}$$

Zwei Fälle für aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots$:

1. Die Kette wird konstant.

- ▶ also $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \dots = n'$.
- ▶ also jedenfalls $\bigsqcup_i x_i = n'$; zwei Unterfälle:
 - ▶ Wenn $n' = u_j$ ist, dann ist wegen $f(u_j) = u_j$ ist auch $\bigsqcup_i f(x_i) = u_j$, also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
 - ▶ Wenn $n' \in \mathbb{N}_0$ ist, dann ist $f(\bigsqcup_i x_i) = f(n') = n' + 1$. Andererseits ist die Kette der Funktionswerte $f(x_0) \sqsubseteq f(x_1) \sqsubseteq f(x_2) \sqsubseteq \dots \sqsubseteq f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2}) = \dots = f(n') = n' + 1$. Also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

2. Die Kette wird nicht konstant.

- ▶ dann alle $x_i \in \mathbb{N}_0$ und die Kette wächst unbeschränkt
- ▶ gleiches gilt für Kette der Funktionswerte.
- ▶ Also haben beide Ketten Supremum u_1 und wegen $f(u_1) = u_1$ ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_j & \text{falls } x = u_j \quad (\text{für } j = 1, 2) \end{cases}$$

Zwei Fälle für aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots$:

1. Die Kette wird konstant.

- ▶ also $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \dots = n'$.
- ▶ also jedenfalls $\bigsqcup_i x_i = n'$; zwei Unterfälle:
 - ▶ Wenn $n' = u_j$ ist, dann ist wegen $f(u_j) = u_j$ ist auch $\bigsqcup_i f(x_i) = u_j$, also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
 - ▶ Wenn $n' \in \mathbb{N}_0$ ist, dann ist $f(\bigsqcup_i x_i) = f(n') = n' + 1$. Andererseits ist die Kette der Funktionswerte $f(x_0) \sqsubseteq f(x_1) \sqsubseteq f(x_2) \sqsubseteq \dots \sqsubseteq f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2}) = \dots = f(n') = n' + 1$. Also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

2. Die Kette wird nicht konstant.

- ▶ dann alle $x_i \in \mathbb{N}_0$ und die Kette wächst unbeschränkt
- ▶ gleiches gilt für Kette der Funktionswerte.
- ▶ Also haben beide Ketten Supremum u_1 und wegen $f(u_1) = u_1$ ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_j & \text{falls } x = u_j \quad (\text{für } j = 1, 2) \end{cases}$$

Zwei Fälle für aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots$:

1. Die Kette wird konstant.

- ▶ also $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \dots = n'$.
- ▶ also jedenfalls $\bigsqcup_i x_i = n'$; zwei Unterfälle:
 - ▶ Wenn $n' = u_j$ ist, dann ist wegen $f(u_j) = u_j$ ist auch $\bigsqcup_i f(x_i) = u_j$, also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
 - ▶ Wenn $n' \in \mathbb{N}_0$ ist, dann ist $f(\bigsqcup_i x_i) = f(n') = n' + 1$. Andererseits ist die Kette der Funktionswerte $f(x_0) \sqsubseteq f(x_1) \sqsubseteq f(x_2) \sqsubseteq \dots \sqsubseteq f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2}) = \dots = f(n') = n' + 1$. Also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

2. Die Kette wird nicht konstant.

- ▶ dann alle $x_i \in \mathbb{N}_0$ und die Kette wächst unbeschränkt
- ▶ gleiches gilt für Kette der Funktionswerte.
- ▶ Also haben beide Ketten Supremum u_1 und wegen $f(u_1) = u_1$ ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

- ▶ $N' = \mathbb{N}_0 \cup \{u_1, u_2\}$ mit \sqsubseteq wie eben
- ▶ Abbildung $g : N' \rightarrow N'$ mit

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_1 & \text{falls } x = u_2 \\ u_2 & \text{falls } x = u_1 \end{cases}$$

ist *nicht* stetig

- ▶ Unterschied zu f : $g(u_1) = u_2$
- ▶ unbeschränkt wachsende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots$ natürlicher Zahlen hat Supremum u_1
- ▶ also $g(\bigsqcup_i x_i) = u_2$,
- ▶ aber Kette der Funktionswerte $g(x_0) \sqsubseteq g(x_1) \sqsubseteq g(x_2) \sqsubseteq \dots$ hat Supremum $\bigsqcup_i g(x_i) = u_1 \neq g(\bigsqcup_i x_i)$.

- ▶ $N' = \mathbb{N}_0 \cup \{u_1, u_2\}$ mit \sqsubseteq wie eben
- ▶ Abbildung $g : N' \rightarrow N'$ mit

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_1 & \text{falls } x = u_2 \\ u_2 & \text{falls } x = u_1 \end{cases}$$

ist *nicht* stetig

- ▶ Unterschied zu f : $g(u_1) = u_2$
- ▶ unbeschränkt wachsende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots$ natürlicher Zahlen hat Supremem u_1
- ▶ also $g(\bigsqcup_i x_i) = u_2$,
- ▶ aber Kette der Funktionswerte $g(x_0) \sqsubseteq g(x_1) \sqsubseteq g(x_2) \sqsubseteq \dots$ hat Supremem $\bigsqcup_i g(x_i) = u_1 \neq g(\bigsqcup_i x_i)$.

Satz

- ▶ Es sei $f : D \rightarrow D$ eine monotone und stetige Abbildung auf einer vollständigen Halbordnung (D, \sqsubseteq) mit kleinstem Element \perp .
- ▶ Elemente $x_i \in D$ seien wie folgt definiert:

$$x_0 = \perp$$
$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : x_{i+1} = f(x_i)$$

- ▶ Dann gilt:
 1. Die x_i bilden eine Kette: $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \dots$.
 2. Das **Supremum** $x_f = \bigsqcup_i x_i$ dieser Kette **ist Fixpunkt von f** , also $f(x_f) = x_f$.
 3. **x_f ist der kleinste Fixpunkt von f** : Wenn $f(y_f) = y_f$ ist, dann ist $x_f \sqsubseteq y_f$.

1. Behauptung: $\forall i \in \mathbb{N}_0$ gilt $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$

vollständige Induktion:

- ▶ $x_0 \sqsubseteq x_1$, weil $x_0 = \perp$ das kleinste Element
- ▶ wenn $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$, dann wegen Monotonie von f auch $f(x_i) \sqsubseteq f(x_{i+1})$, also $x_{i+1} \sqsubseteq x_{i+2}$.

2. Behauptung: $x_f = \bigsqcup_i x_i$ ist Fixpunkt, also $f(x_f) = x_f$

- ▶ Wegen Stetigkeit von f ist
 $f(x_f) = f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i) = \bigsqcup_i x_{i+1}$.
- ▶ Folge der x_{i+1} unterscheidet sich von Folge der x_i nur durch fehlendes erstes Element \perp .
- ▶ Also haben beide Folgen das gleiche Supremum x_f (klar?)
also $\bigsqcup_i x_{i+1} = \bigsqcup_i x_i = x_f$
- ▶ also ist $f(x_f) = x_f$

3. Behauptung: x_f ist kleinster Fixpunkt. Sei $f(y_f) = y_f$.

- ▶ Induktion lehrt: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : x_i \sqsubseteq y_f$.
- ▶ also ist y_f eine obere Schranke der Kette,
- ▶ also ist gilt für die kleinste obere Schranke: $x_f = \bigsqcup_i x_i \sqsubseteq y_f$.

1. Behauptung: $\forall i \in \mathbb{N}_0$ gilt $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$

vollständige Induktion:

- ▶ $x_0 \sqsubseteq x_1$, weil $x_0 = \perp$ das kleinste Element
- ▶ wenn $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$, dann wegen Monotonie von f auch $f(x_i) \sqsubseteq f(x_{i+1})$, also $x_{i+1} \sqsubseteq x_{i+2}$.

2. Behauptung: $x_f = \bigsqcup_i x_i$ ist Fixpunkt, also $f(x_f) = x_f$

- ▶ Wegen Stetigkeit von f ist
 $f(x_f) = f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i) = \bigsqcup_i x_{i+1}$.
- ▶ Folge der x_{i+1} unterscheidet sich von Folge der x_i nur durch fehlendes erstes Element \perp .
- ▶ Also haben beide Folgen das gleiche Supremum x_f (klar?)
also $\bigsqcup_i x_{i+1} = \bigsqcup_i x_i = x_f$
- ▶ also ist $f(x_f) = x_f$

3. Behauptung: x_f ist kleinster Fixpunkt. Sei $f(y_f) = y_f$.

- ▶ Induktion lehrt: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : x_i \sqsubseteq y_f$.
- ▶ also ist y_f eine obere Schranke der Kette,
- ▶ also ist gilt für die kleinste obere Schranke: $x_f = \bigsqcup_i x_i \sqsubseteq y_f$.

1. Behauptung: $\forall i \in \mathbb{N}_0$ gilt $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$

vollständige Induktion:

- ▶ $x_0 \sqsubseteq x_1$, weil $x_0 = \perp$ das kleinste Element
- ▶ wenn $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$, dann wegen Monotonie von f auch $f(x_i) \sqsubseteq f(x_{i+1})$, also $x_{i+1} \sqsubseteq x_{i+2}$.

2. Behauptung: $x_f = \bigsqcup_i x_i$ ist Fixpunkt, also $f(x_f) = x_f$

- ▶ Wegen Stetigkeit von f ist
 $f(x_f) = f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i) = \bigsqcup_i x_{i+1}$.
- ▶ Folge der x_{i+1} unterscheidet sich von Folge der x_i nur durch fehlendes erstes Element \perp .
- ▶ Also haben beide Folgen das gleiche Supremum x_f (klar?)
also $\bigsqcup_i x_{i+1} = \bigsqcup_i x_i = x_f$
- ▶ also ist $f(x_f) = x_f$

3. Behauptung: x_f ist kleinster Fixpunkt. Sei $f(y_f) = y_f$.

- ▶ Induktion lehrt: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : x_i \sqsubseteq y_f$.
- ▶ also ist y_f eine obere Schranke der Kette,
- ▶ also ist gilt für die kleinste obere Schranke: $x_f = \bigsqcup_i x_i \sqsubseteq y_f$.

Fixpunktsatz: Andeutung eines Anwendungsbeispiels (1)

- ▶ Terminalzeichenalphabet $T = \{a, b\}$
- ▶ kontextfreie Grammatik $G = (\{X\}, T, X, P)$
- ▶ Produktionsmenge $P = \{X \rightarrow aXb \mid \varepsilon\}$.

- ▶ Halbordnung $D = 2^{T^*}$ der formalen Sprachen mit \subseteq
- ▶ Kleinstes Element der Halbordnung ist \emptyset .
- ▶ Die Halbordnung ist vollständig.

- ▶ $f : D \rightarrow D$ die Abbildung mit $f(L) = \{a\}L\{b\} \cup \{\varepsilon\}$.
- ▶ ohne (den leichten) Beweis: f ist stetig.
- ▶ Fixpunktsatz: Das Supremum der Kette

$$\{\} \subseteq f(\{\}) \subseteq f(f(\{\})) \subseteq f(f(f(\{\}))) \subseteq \dots$$

ist der kleinste Fixpunkt von f

Fixpunktsatz: Andeutung eines Anwendungsbeispiels (1)

- ▶ Terminalzeichenalphabet $T = \{a, b\}$
- ▶ kontextfreie Grammatik $G = (\{X\}, T, X, P)$
- ▶ Produktionsmenge $P = \{X \rightarrow aXb \mid \varepsilon\}$.

- ▶ Halbordnung $D = 2^{T^*}$ der formalen Sprachen mit \subseteq
- ▶ Kleinstes Element der Halbordnung ist \emptyset .
- ▶ Die Halbordnung ist vollständig.

- ▶ $f : D \rightarrow D$ die Abbildung mit $f(L) = \{a\}L\{b\} \cup \{\varepsilon\}$.
- ▶ ohne (den leichten) Beweis: f ist stetig.
- ▶ Fixpunktsatz: Das Supremum der Kette

$$\{\} \subseteq f(\{\}) \subseteq f(f(\{\})) \subseteq f(f(f(\{\}))) \subseteq \dots$$

ist der kleinste Fixpunkt von f

Fixpunktsatz: Andeutung eines Anwendungsbeispiels (1)

- ▶ Terminalzeichenalphabet $T = \{a, b\}$
- ▶ kontextfreie Grammatik $G = (\{X\}, T, X, P)$
- ▶ Produktionsmenge $P = \{X \rightarrow aXb \mid \varepsilon\}$.

- ▶ Halbordnung $D = 2^{T^*}$ der formalen Sprachen mit \subseteq
- ▶ Kleinstes Element der Halbordnung ist \emptyset .
- ▶ Die Halbordnung ist vollständig.

- ▶ $f : D \rightarrow D$ die Abbildung mit $f(L) = \{a\}L\{b\} \cup \{\varepsilon\}$.
- ▶ ohne (den leichten) Beweis: f ist stetig.
- ▶ Fixpunktsatz: Das Supremum der Kette

$$\{\} \subseteq f(\{\}) \subseteq f(f(\{\})) \subseteq f(f(f(\{\}))) \subseteq \dots$$

ist der kleinste Fixpunkt von f

Fixpunktsatz: Andeutung eines Anwendungsbeispiels (2)

- ▶ $f : D \rightarrow D$ die Abbildung mit $f(L) = \{\mathbf{a}\}L\{\mathbf{b}\} \cup \{\varepsilon\}$.
- ▶ $L_0 = \{\}$
 $L_1 = f(L_0) = \{\mathbf{a}\}L_0\{\mathbf{b}\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$
 $L_2 = f(L_1) = \{\mathbf{a}\}L_1\{\mathbf{b}\} \cup \{\varepsilon\} = \{\mathbf{ab}, \varepsilon\}$
 $L_3 = f(L_2) = \{\mathbf{a}\}L_2\{\mathbf{b}\} \cup \{\varepsilon\} = \{\mathbf{aabb}, \mathbf{ab}, \varepsilon\}$
 \vdots
- ▶ Supremum ist $\bigcup_i L_i = \{\mathbf{a}^k\mathbf{b}^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$
- ▶ Das ist auch genau die Sprache, die die Grammatik erzeugt.
- ▶ L ist Fixpunkt von f , also

$$L = \{\mathbf{a}\}L\{\mathbf{b}\} \cup \{\varepsilon\}$$

- ▶ L ist die kleinste Lösung der Gleichung $X = \{\mathbf{a}\}X\{\mathbf{b}\} \cup \{\varepsilon\}$.
- ▶ Zusammenhang mit Produktionen: klar, oder?

Das sollten Sie mitnehmen:

- ▶ Halbordnungen sind
 - ▶ reflexiv,
 - ▶ antisymmetrisch und
 - ▶ transitiv
- ▶ vollständige Halbordnungen: jede aufsteigende Kette hat Supremum
- ▶ stetige Abbildungen: $f(\bigsqcup x_i) = \bigsqcup f(x_i)$
- ▶ Fixpunktsatz

Das sollten Sie üben:

- ▶ Nachweis der Eigenschaften von (vollständigen) Halbordnungen
- ▶ Beweise einfacher Aussagen
- ▶ an ungewohnte Eigenschaften von Halbordnungen gewöhnen (Unendlichkeit lässt grüßen) (siehe auch gleich)

Äquivalenzrelationen

Definition

Äquivalenzrelationen von Nerode

Äquivalenzklassen und Faktormengen

Kongruenzrelationen

Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

Wohldefiniiertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

Halbordnungen

Grundlegende Definitionen

„Extreme“ Elemente

Vollständige Halbordnungen

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

Ordnungen

- ▶ Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine *Ordnung* oder genauer *totale Ordnung*, wenn
 - ▶ R Halbordnung ist
 - ▶ und gilt:

$$\forall x, y \in M : xRy \vee yRx$$

- ▶ Es gibt keine unvergleichbaren Elemente.
- ▶ Beispiele:
 - ▶ (\mathbb{N}_0, \leq)
 - ▶ $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \sqsubseteq)$ mit
$$(x_1, x_2) \sqsubseteq (y_1, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)$$
 - ▶ $(\{a, b\}^*, \sqsubseteq_1)$ mit \sqsubseteq_1 „wie im Wörterbuch“

- ▶ Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine *Ordnung* oder genauer *totale Ordnung*, wenn
 - ▶ R Halbordnung ist
 - ▶ und gilt:

$$\forall x, y \in M : xRy \vee yRx$$

- ▶ Es gibt keine unvergleichbaren Elemente.
- ▶ Beispiele:
 - ▶ (\mathbb{N}_0, \leq)
 - ▶ $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \sqsubseteq)$ mit
$$(x_1, x_2) \sqsubseteq (y_1, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)$$
 - ▶ $(\{a, b\}^*, \sqsubseteq_1)$ mit \sqsubseteq_1 „wie im Wörterbuch“

- ▶ Relation \sqsubseteq_p auf $\{a, b\}^*$:

$$w_1 \sqsubseteq_p w_2 \iff \exists u \in A^* : w_1 u = w_2$$

ist *keine* totale Ordnung

- ▶ z. B. sind **a** und **b** unvergleichbar
- ▶ Wie kann man aus \sqsubseteq_p eine totale Ordnung machen?
 - ▶ jedenfalls totale Ordnung \sqsubseteq_A auf A nötig, z. B. $a \sqsubseteq_A b$
 - ▶ und dann?
 - ▶ mehrere Möglichkeiten, z. B. wie im Wörterbuch, oder ...

- ▶ Relation \sqsubseteq_p auf $\{a, b\}^*$:

$$w_1 \sqsubseteq_p w_2 \iff \exists u \in A^* : w_1 u = w_2$$

ist *keine* totale Ordnung

- ▶ z. B. sind **a** und **b** unvergleichbar
- ▶ Wie kann man aus \sqsubseteq_p eine totale Ordnung machen?
- ▶ jedenfalls totale Ordnung \sqsubseteq_A auf A nötig, z. B. $a \sqsubseteq_A b$
- ▶ und dann?
- ▶ mehrere Möglichkeiten, z. B. wie im Wörterbuch, oder ...

- ▶ Relation \sqsubseteq_p auf $\{a, b\}^*$:

$$w_1 \sqsubseteq_p w_2 \iff \exists u \in A^* : w_1 u = w_2$$

ist *keine* totale Ordnung

- ▶ z. B. sind **a** und **b** unvergleichbar
- ▶ Wie kann man aus \sqsubseteq_p eine totale Ordnung machen?
- ▶ jedenfalls totale Ordnung \sqsubseteq_A auf A nötig, z. B. $a \sqsubseteq_A b$
- ▶ und dann?
- ▶ mehrere Möglichkeiten, z. B. wie im Wörterbuch, oder ...

- ▶ Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- ▶ Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v u_1$ und $w_2 = v u_2$.
 - ▶ v ist immer eindeutig bestimmt.
- ▶ Fallunterscheidung:
 1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
 2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
 3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u'_1, u'_2 \in A^*$ mit $w_1 = v x u'_1$ und $w_2 = v y u'_2$.
Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- ▶ Beispiele
 - ▶ „Klaus“ kommt vor „Klausur“
 - ▶ „Klausur“ kommt vor „Übung“
(im Duden, aber nicht im Studium!)

- ▶ Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- ▶ Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v u_1$ und $w_2 = v u_2$.
 - ▶ v ist immer eindeutig bestimmt.
- ▶ Fallunterscheidung:
 1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
 2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
 3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u'_1, u'_2 \in A^*$ mit $w_1 = v x u'_1$ und $w_2 = v y u'_2$.
Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- ▶ Beispiele
 - ▶ „Klaus“ kommt vor „Klausur“
 - ▶ „Klausur“ kommt vor „Übung“
(im Duden, aber nicht im Studium!)

- ▶ Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- ▶ Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v u_1$ und $w_2 = v u_2$.
 - ▶ v ist immer eindeutig bestimmt.
- ▶ Fallunterscheidung:
 1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
 2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
 3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u'_1, u'_2 \in A^*$ mit $w_1 = v x u'_1$ und $w_2 = v y u'_2$.
Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- ▶ Beispiele
 - ▶ „Klaus“ kommt vor „Klausur“
 - ▶ „Klausur“ kommt vor „Übung“
(im Duden, aber nicht im Studium!)

- ▶ Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- ▶ Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v u_1$ und $w_2 = v u_2$.
 - ▶ v ist immer eindeutig bestimmt.
- ▶ Fallunterscheidung:
 1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
 2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
 3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u'_1, u'_2 \in A^*$ mit
 - ▶ $x \neq y$ und
 - ▶ $w_1 = v x u'_1$ und $w_2 = v y u'_2$Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- ▶ Beispiele
 - ▶ „Klaus“ kommt vor „Klausur“
 - ▶ „Klausur“ kommt vor „Übung“
(im Duden, aber nicht im Studium!)

- ▶ Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- ▶ Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v u_1$ und $w_2 = v u_2$.
 - ▶ v ist immer eindeutig bestimmt.
- ▶ Fallunterscheidung:
 1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
 2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
 3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u'_1, u'_2 \in A^*$ mit
 - ▶ $x \neq y$ und
 - ▶ $w_1 = v x u'_1$ und $w_2 = v y u'_2$Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- ▶ Beispiele
 - ▶ „Klaus“ kommt vor „Klausur“
 - ▶ „Klausur“ kommt vor „Übung“
(im Duden, aber nicht im Studium!)

- ▶ Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- ▶ Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v u_1$ und $w_2 = v u_2$.
 - ▶ v ist immer eindeutig bestimmt.
- ▶ Fallunterscheidung:
 1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
 2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
 3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u'_1, u'_2 \in A^*$ mit
 - ▶ $x \neq y$ und
 - ▶ $w_1 = v x u'_1$ und $w_2 = v y u'_2$Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- ▶ Beispiele
 - ▶ „Klaus“ kommt vor „Klausur“
 - ▶ „Klausur“ kommt vor „Übung“
(im Duden, aber nicht im Studium!)

- ▶ Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- ▶ Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v u_1$ und $w_2 = v u_2$.
 - ▶ v ist immer eindeutig bestimmt.
- ▶ Fallunterscheidung:
 1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
 2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
 3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u'_1, u'_2 \in A^*$ mit
 - ▶ $x \neq y$ und
 - ▶ $w_1 = v x u'_1$ und $w_2 = v y u'_2$Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.

▶ Beispiele

- ▶ „Klaus“ kommt vor „Klausur“
- ▶ „Klausur“ kommt vor „Übung“
(im Duden, aber nicht im Studium!)

- ▶ Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- ▶ Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v u_1$ und $w_2 = v u_2$.
 - ▶ v ist immer eindeutig bestimmt.
- ▶ Fallunterscheidung:
 1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
 2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
 3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u'_1, u'_2 \in A^*$ mit
 - ▶ $x \neq y$ und
 - ▶ $w_1 = v x u'_1$ und $w_2 = v y u'_2$Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.

▶ Beispiele

- ▶ „Klaus“ kommt vor „Klausur“
- ▶ „Klausur“ kommt vor „Übung“
(im Duden, aber nicht im Studium!)

- ▶ Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- ▶ Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v u_1$ und $w_2 = v u_2$.
 - ▶ v ist immer eindeutig bestimmt.
- ▶ Fallunterscheidung:
 1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
 2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
 3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u'_1, u'_2 \in A^*$ mit
 - ▶ $x \neq y$ und
 - ▶ $w_1 = v x u'_1$ und $w_2 = v y u'_2$Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.

▶ Beispiele

- ▶ „Klaus“ kommt vor „Klausur“
- ▶ „Klausur“ kommt vor „Übung“
(im Duden, aber nicht im Studium!)

- ▶ Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- ▶ Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v u_1$ und $w_2 = v u_2$.
 - ▶ v ist immer eindeutig bestimmt.
- ▶ Fallunterscheidung:
 1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
 2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
 3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u'_1, u'_2 \in A^*$ mit
 - ▶ $x \neq y$ und
 - ▶ $w_1 = v x u'_1$ und $w_2 = v y u'_2$Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.

▶ Beispiele

- ▶ „Klaus“ kommt vor „Klausur“
- ▶ „Klausur“ kommt vor „Übung“
(im Duden, aber nicht im Studium!)

- ▶ Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- ▶ Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v u_1$ und $w_2 = v u_2$.
 - ▶ v ist immer eindeutig bestimmt.
- ▶ Fallunterscheidung:
 1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
 2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
 3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u'_1, u'_2 \in A^*$ mit
 - ▶ $x \neq y$ und
 - ▶ $w_1 = v x u'_1$ und $w_2 = v y u'_2$Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- ▶ Beispiele
 - ▶ „Klaus“ kommt vor „Klausur“
 - ▶ „Klausur“ kommt vor „Übung“
(im Duden, aber nicht im Studium!)

- ▶ Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- ▶ Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v u_1$ und $w_2 = v u_2$.
 - ▶ v ist immer eindeutig bestimmt.
- ▶ Fallunterscheidung:
 1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
 2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
 3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u'_1, u'_2 \in A^*$ mit
 - ▶ $x \neq y$ und
 - ▶ $w_1 = v x u'_1$ und $w_2 = v y u'_2$Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- ▶ Beispiele
 - ▶ „Klaus“ kommt vor „Klausur“
 - ▶ „Klausur“ kommt vor „Übung“
(im Duden, aber nicht im Studium!)

- ▶ Wenn man nur endlich viele Wörter ordnen muss (Wörterbuch), dann „harmlos“; Beispiel:

$a \sqsubseteq_1 aa \sqsubseteq_1 aaa \sqsubseteq_1 aaaa$
 $\sqsubseteq_1 ab \sqsubseteq_1 aba \sqsubseteq_1 abbb$
 $\sqsubseteq_1 b \sqsubseteq_1 baaaaaa \sqsubseteq_1 baab$
 $\sqsubseteq_1 bbbbb$

- ▶ wenn man A^* ordnet, nicht ganz so harmlos; unvollständig
 - ▶ $\varepsilon \sqsubseteq_1 a \sqsubseteq_1 aa \sqsubseteq_1 aaa \sqsubseteq_1 aaaa \sqsubseteq_1 \dots$ besitzt kein Supremum,
 - ▶ denn
 - ▶ jedes Wort, das mindestens ein b enthält, ist obere Schranke,
 - ▶ zu jeder oberen Schranke w ist $a^{|w|}b$ eine echt kleine obere Schranke (weil w ein b enthält)
 - ▶ $b \sqsupseteq_1 ab \sqsupseteq_1 aab \sqsupseteq_1 aaab \sqsupseteq_1 aaaab \sqsupseteq_1 \dots$ hat kein Infimum

- ▶ Wenn man nur endlich viele Wörter ordnen muss (Wörterbuch), dann „harmlos“; Beispiel:

$$\begin{array}{l} a \sqsubseteq_1 aa \sqsubseteq_1 aaa \sqsubseteq_1 aaaa \\ \sqsubseteq_1 ab \sqsubseteq_1 aba \sqsubseteq_1 abbb \\ \sqsubseteq_1 b \sqsubseteq_1 baaaaaa \sqsubseteq_1 baab \\ \sqsubseteq_1 bbbbb \end{array}$$

- ▶ wenn man A^* ordnet, nicht ganz so harmlos; unvollständig
 - ▶ $\varepsilon \sqsubseteq_1 a \sqsubseteq_1 aa \sqsubseteq_1 aaa \sqsubseteq_1 aaaa \sqsubseteq_1 \dots$ besitzt kein Supremum,
 - ▶ denn
 - ▶ jedes Wort, das mindestens ein **b** enthält, ist obere Schranke,
 - ▶ zu jeder oberen Schranke w ist $a^{|w|}b$ eine echt kleine obere Schranke (weil w ein **b** enthält)
 - ▶ $b \sqsupseteq_1 ab \sqsupseteq_1 aab \sqsupseteq_1 aaab \sqsupseteq_1 aaaab \sqsupseteq_1 \dots$ hat kein Infimum

- ▶ andere lexikographische Ordnung \sqsubseteq_2 auf A^* :
 $w_1 \sqsubseteq_2 w_2$ gilt genau dann, wenn
 - ▶ entweder $|w_1| < |w_2|$
 - ▶ oder $|w_1| = |w_2|$ und $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$ gilt.
- ▶ Diese Ordnung beginnt also z. B. im Fall $A = \{a, b\}$ bei naheliegender Ordnung \sqsubseteq_A so:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\sqsubseteq_2 a \sqsubseteq_2 b \\ &\sqsubseteq_2 aa \sqsubseteq_2 ab \sqsubseteq_2 ba \sqsubseteq_2 bb \\ &\sqsubseteq_2 aaa \sqsubseteq_2 \cdots \sqsubseteq_2 bbb \\ &\sqsubseteq_2 aaaa \sqsubseteq_2 \cdots \sqsubseteq_2 bbbb \\ &\cdots \end{aligned}$$

- ▶ \sqsubseteq_1 auf Menge A^n aller Wörter fester Länge n ist totale Ordnung
 - ▶ Halbordnung: nachprüfen ...
 - ▶ für verschiedene Wörter gleicher Länge niemals $w_1 = v$ oder $w_2 = v$.
 - ▶ da \sqsubseteq_A als total vorausgesetzt wird, ist bei $w_1 = v \times u'_1$ und $w_2 = v \times y \times u'_2$ stets $x \sqsubseteq_A y$ oder $y \sqsubseteq_A x$
 - ▶ also stets $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$ oder $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$.
- ▶ also \sqsubseteq_2 auf A^* totale Ordnung
- ▶ \sqsubseteq_1 für verschieden lange Wörter: nachprüfen ...

Das sollten Sie mitnehmen:

- ▶ totale Ordnungen sind
 - ▶ Halbordnungen
 - ▶ ohne unvergleichbare Elemente
- ▶ Anwendung an diversen Stellen in der Informatik (z. B. Semantik, Testmuster, ...)

Das sollten Sie üben:

- ▶ Nachweis der Eigenschaften von totalen Ordnungen
- ▶ Beweise einfacher Aussagen
- ▶ an ungewohnte Eigenschaften von Ordnungen gewöhnen (Unendlichkeit lässt grüßen)