18 LOGIK

In dieser und zum Beispiel in den Mathematikvorlesungen wurden an vielen Stellen „logische Formeln“ verwendet, und zwar (nahezu?) ausschließlich um sich längliche umgangssprachliche Schreibweisen sparen und statt dessen eine kompakte Notation benutzen zu können. In dieser Einheit wollen wir zumindest die Grundzüge andeuten, denen man folgt, wenn man logische Formeln zum Untersuchungsgegenstand macht.

Diese Einheit ist relativ abstrakt und steht (deswegen) am Ende der Vorlesung. Trotzdem hoffen wir, auch hier wieder das ein oder andere Körnchen Neugier säen zu können, das in einer späteren Vorlesung, im vorliegenden Fall z. B. „Formale Systeme“, keimen kann.

18.1 FORMELN IN PRÄDIKATENLOGIK ERSTER STUFE

Das Vokabular für Prädikatenlogik erster Stufe besteht aus folgenden Symbolen

- einer abzählbar unendlichen Menge von *Variablensymbolen*, für die wir x_1, x_2, … schreiben werden, *Variablensymbole*
- einer abzählbar unendlichen Menge von *Konstantensymbolen*, für die wir c_1, c_2, … schreiben werden, *Konstantensymbole*
- für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ einer abzählbar unendlichen Menge von k-*stelligen Funktionssymbolen*, für die wir f^k_1, f^k_2, … schreiben werden, *Funktionssymbole*
- für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ einer abzählbar unendlichen Menge von k-*stelligen Relationssymbolen*, für die wir R^k_1, R^k_2, … schreiben werden, *Relationssymbole*
- den *logischen Konnektiven* $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\Rightarrow$, *logisches Konnektiv*
- den Klammern (und) und dem Komma , sowie
- den Quantoren $\forall$ und $\exists$.

Wir haben wie in der Prädikatenlogik üblich unendlich viele Symbole vorgesehen, damit man in konkreten Anwendungen nicht beschränkt ist. In vielen konkreten Fällen sind aber (oft) endlich viele Symbole jeder Art ausreichend.

Welche Zeichenfolgen über diesem Vokabular legale prädikatenlogische Formeln erster Stufe sind, wird in drei Schritten festgelegt. Wir benutzen wieder einmal rekursive Definitionen. Aber dank des Fixpunktpunktsatzes aus Einheit 17 wissen wir inzwischen, dass wir sozusagen den kleinsten Fixpunkt dieser Definition als das zu Definierende auffassen können.

Als erstes definieren wir, was wir unter einem *Term* verstehen wollen. *Term*

- Jedes Variablensymbol ist ein Term.
- Jedes Konstantensymbol ist ein Term.
- Wenn f ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $t_1, \dots, t_k$ k Terme sind, dann ist auch $f(t_1, \dots, t_k)$ ein Term.
- Ein Term, in dem keine Variablensymbole vorkommen, heißt *Grundterm*. *Grundterm*

Einfache Beispiele für Terme:

- x_1, x_3, x_{42}
- c_2, c_{42}, c_{4711}
- Terme mit Funktionssymbol:
  - $f_1^1(x_1)$
  - $f_1^2(c_3, x_2)$
  - $f_1^2(f_1^1(x_1), f_1^2(c_3, x_2))$

Als nächstes legt man fest, was eine *atomare Formel* ist:

atomare Formel

- Wenn R ein k-stelliges Relationssymbol ist und $t_1, \dots, t_k$ k Terme sind, dann ist $R(t_1, \dots, t_k)$ eine atomare Formel.

Einfache Beispiele für atomare Formeln sind

- $R_1^1(x_1)$
- $R_1^2(c_3, x_2)$
- $R_1^2(f_1^1(x_1), f_1^2(c_3, x_2))$
- Aber z. B. x_3, c_5 oder irgendwelche anderen Terme sind *keine* atomare Formeln.

Als letztes werden *prädikatenlogische Formeln*, (oder kurz: Formeln) definiert:

prädikatenlogische Formel

- Jede atomare Formel ist Formel.
- Wenn $\mathcal{F}$ eine Formel ist, dann ist auch $(\neg\mathcal{F})$ eine Formel.
- Wenn $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ Formeln sind, dann sind auch $(\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2)$, $(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2)$ und $(\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2)$ Formeln.
- Wenn $\mathcal{F}$ eine Formel ist und x ein Variablensymbol, dann sind auch $(\forall x\ \mathcal{F})$ und $(\exists x\ \mathcal{F})$ Formeln.

Wie üblich ist man in der Realität bei der Klammersetzung etwas großzügiger als obige Definition. Dann sind zum Beispiel die folgenden Zeichenketten Formeln.

- $(\neg R_5^2(x_2, x_7))$
- $R_1^1(x_6) \Rightarrow (\neg R_5^2(x_2, x_7))$
- $\exists x_2\ (R_1^1(x_6) \Rightarrow (\neg R_5^2(x_2, x_7)))$

Für den Rest dieser Einheit sei vereinbart, dass wir mit „Formel" immer eine Formel in Prädikatenlogik erster Stufe meinen.

18.2 Theorien und Beweisbarkeit

In Mathematikvorlesungen haben Sie etwas aus der Theorie der Vektorräume gelernt. Grundlage dafür ist unter anderem, dass man etwas über Gruppen weiß. Dazu wurde definiert, „was eine Gruppe ist", in dem eine Reihe von Forderungen als logische Formeln aufgeschrieben wurden. So etwas nennt man Axiome. Und dann haben Sie Sätze bewiesen, d. h. Sie haben Beweise aufgeschrieben für neue Aussagen, die sich von den bisher gegebenen unterschieden.

Aber was ist eigentlich ein Beweis? Jedenfalls geht man üblicherweise schrittweise vor und jeder einzelne Schritt ist gerechtfertigt. Eine Rechtfertigung kann sein, dass etwas aus der Ergebnissen vorgegangener Schritte „zwingend folgt", eine andere, dass etwas „offensichtlich" ist wie behauptet. Das kann daran liegen, dass es sich um eines der der Theorie zu Grunde liegenden Axiome handelt, oder gar um eine Aussage, der man anhand ihrer Struktur ansieht, dass sie immer gilt. Das träfe zum Beispiel auf jede Formel der Struktur $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_1$ zu, ganz gleich, um welche Teilformeln $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ es sich handelt.

Beweis

In der formalen Logik präzisiert man das wie folgt. Ein *Beweis* ist eine endliche Folge $F_1, F_2, \ldots, F_k$ von Formeln. Dabei ist jede Formel entweder ein sogenanntes Axiom, oder sie ergibt sich aus in der Folge vorangegangenen Formeln durch eine einfache sogenannte Ableitungsregel.

Bei den Axiomen hat man zum einen solche, die immer wahr sind, gleich welche Interpretation man zu Grunde legt. Dazu gehören zum Beispiel alle, die von einer der Formen

- $\mathcal{F}_1 \Rightarrow (\mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_1)$ bzw. äquivalent $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_1$
- $(\mathcal{F}_1 \Rightarrow (\mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_3)) \Rightarrow ((\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2) \Rightarrow (\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_3))$ bzw. äquivalent $(\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_3) \wedge (\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2) \Rightarrow (\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_3)$
- $(\neg \mathcal{F}_2 \Rightarrow \neg \mathcal{F}_1) \Rightarrow ((\neg \mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_1) \Rightarrow \mathcal{F}_2)$ bzw. äquivalent $(\neg \mathcal{F}_2 \Rightarrow \neg \mathcal{F}_1) \wedge (\neg \mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_1) \Rightarrow \mathcal{F}_2$

sind für beliebige Formeln $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ und $\mathcal{F}_3$. Hinzu kommen weitere Formeln, in denen explizit Quantoren eine Rolle spielen. Von den beiden üblicherweise verwendeten Ableitungsregeln erwähnen wir nur eine genauer (Die zweite heißt *Generalisierung*). Sie heißt *Modus ponens* und besagt:

Generalisierung

Modus ponens

- Wenn man schon eine Formel $\mathcal{F}_1$ bewiesen hat und außerdem eine Formel, die von der Form $\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2$ ist, dann darf man auch die Formel $\mathcal{F}_2$ als bewiesen ansehen.

Eine Theorie erster Stufe ist festgelegt durch

- die Auswahl endlich vieler Konstanten- und Funktionssymbole,
- die Auswahl mindestens eines Prädikatensysmbols,
- der mit ihrer Hilfe konstruierbaren Formeln wie oben, die immer wahr sind,
- und zusätzliche theorie-spezifische Axiome (z. B. die Gruppenaxiome)
- die beiden Ableitungsregeln Modus ponens und Generalisierung.

Man könnte es als ein großes algorithmisches Problem ansehen, für eine gegebene Formel herauszufinden, ob sie in einer Theorie beweisbar ist oder nicht, und falls das der Fall ist, auch gleich noch einen Beweis zu produzieren. In der Tat ist das ein *zu* großes Problem. Es ist im allgemeinen *unentscheidbar*, ob eine Formel in einer Theorie beweisbar ist oder nicht.

Da wir hier nur einen kurzen Einblick in die Grundlagen geben wollen, beschränken wir uns auf abgeschlossene Formeln. Eine Formel heißt *abgeschlossen*, wenn jedes Vorkommen eines Variablensymbols x_i in einer Teilformel liegt, die die Form $(\forall x_i \mathcal{F})$ oder die Form $(\exists x_i \mathcal{F})$ hat.

abgeschlossene Formel

Eine *Interpretation* für eine Formel oder eine Menge von Formeln ist durch folgende Angaben festgelegt:

Interpretation

- eine Menge U, das sogenannte *Universum*,
- ein Element $\mathcal{I}(c_i) \in U$ für jedes Konstantensymbol c_i,
- eine k-stellige Abbildung $\mathcal{I}(f_i^k) : U^k \to U$ für jedes k-stellige Funktionssymbol f_i^k und
- eine k-stellige Relation $\mathcal{I}(R_i^k) \subseteq U^k$ für jedes k-stellige Relationssymbol R_i^k.

Universum

Ohne dass wir das im Detail präzise definieren wollen, hoffen wir, dass trotzdem klar ist, dass jede geschlossene Formel in einer gegebenen Interpretation stets wahr oder falsch ist. Als erstes Beispiel betrachten wir die Formel

$$\forall x_1 \, R_1^2(f_1^2(x_1, c_1), x_1) \wedge \forall x_1 \, R_1^2(f_1^2(c_1, x_1), x_1) \tag{12}$$

Nimmt man für eine Interpretation $U = \mathbb{N}_0$, $\mathcal{I}(c_1) = 0$, $\mathcal{I}(f_1^2) =$ Addition und $\mathcal{I}(R_1^2) = \mathrm{Id}$, dann ist die Formel wahr, denn sie besagt gerade, dass die 0 neutrales Element bezüglich Addition nichtnegativer ganzer Zahlen ist.

Nimmt man für eine Interpretation $U = \{a, b\}^*$, $\mathcal{I}(c_1) = \varepsilon$, $\mathcal{I}(f_1^2) =$ Konkatenation, dann ist die Formel ebenfalls wahr, denn sie besagt gerade, dass das leere Wort neutrales Element bezüglich Konkatenation von Wörtern aus a und b ist.

In dieser Kurzdarstellung wird nur der Fall sogenannter einsortiger Logik behandelt, was in der mathematischen Logik auch gang und gäbe ist. Das bedeutet, dass es nur ein Universum gibt (und nicht mehrere Grundmengen, wie zum Beispiel die Vektoren und Skalaren bei der Theorie der Vektorräume.) Für realistische Anwendungen sind jedoch mehrsortige Logiken unentbehrlich. Diese werden z. B. in den Vorlesungen Formale Systeme I oder Formale Systeme II behandelt.

Eine Interpretation heißt ein *Modell* für eine Menge abgeschlossener Formeln, wenn jede der Formeln in der Interpretation wahr ist.

Modell

Es gibt Situationen, in denen man sich mit genau einer Interpretation beschäfigt. Zum Beispiel werden Sie sich in Ihrer Vorlesung „Analysis“ oder „Höhere Mathematik“ (höchstwahrscheinlich, zumindest in den ersten Wochen) nur für das Universum $U = \mathbb{R}$ interessiert haben. Und wenn etwas bewiesen wurde, dann eben etwas über die reellen Zahlen. Jedenfalls wurde vermutlich so getan.

Alle Ableitungsregeln haben aber eines gemeinsam: Wenn die Formeln, die man als Voraussetzungen braucht, in einer Interpretation wahr sind, dann gilt das auch für die Formel, die man mit Hilfe der Ableitungsregel folgert.

Wesentliche Konsequenz dieser Tatsache ist, dass jedes Modell aller Axiome auch Modell aller daraus ableitbaren Formeln ist.

Zum Beispiel mögen Sie bitte glauben, dass man aus der Formel 12 mit Hilfe endlicher vieler Ableitungsschritte und unter Zuhilfenahme von Axiomen, die in allen Interpretationen wahr sind, die folgende Formel beweisen kann:

$$\forall x_2 \; (\; (\forall x_1 \; f_1^2(x_1, x_2)=x_1 \land \forall x_1 \; f_1^2(x_2, x_1)=x_1) \Rightarrow x_2=c_1 \;) \tag{13}$$

Was bedeutet das? Formel 12 besagt, dass in einem Modell $\mathcal{I}(c_1)$ neutrales Element bezüglich der binären Operation $\mathcal{I}(f_1^2)$ ist. Formel 13 besagt, dass ein solches neutrales Element eindeutig ist. Das gilt also in allen Modellen von Formel 12, d. h. in allen Interpretationen, die über ein neutrales Element aufweisen. Es ist also *immer* eindeutig.

18.4 BEISPIELE FÜR MODELLE FÜR GESCHLOSSENE FORMELN

Ein *normales Modell* sei eines, bei dem das Relationssymbol R_1^2 als Identität interpretiert wird. Im folgenden betrachten wir ausschließlich solche normalen Modelle. Um das deutlich zu machen schreiben wir für das Relationssymbol im folgenden auch $=$ statt R_1^2. *normales Modell*

Welches sind die normalen Modelle der folgenden Formelmenge?

- $\forall x_1 \; \forall x_2 \; \forall x_3 \; f_1^2(x_1, f_1^2(x_2, x_3))=f_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$
- $\forall x_1 \; (f_1^2(x_1, c_1)=x_1 \land f_1^2(c_1, x_1)=x_1)$
- $\forall x_1 \; \exists x_2 \; (f_1^2(x_1, x_2)=c_1 \land f_1^2(x_2, x_1)=c_1)$

Das erste Axiom besagt, dass in jedem normalen Modell $\mathcal{I}(f_1^2)$ eine assoziative Operation ist. Das zweite besagt, dass $\mathcal{I}(c_1)$ neutrales Element bezüglich dieser Operation ist. Und das dritte besagt, dass es zu jedem Element ein Inverses gibt. So wie man beweisen kann, dass neutrale Elemente eindeutig sind, kann man auch beweisen, dass Inverse eindeutig sind. Die normalen Modelle sind also gerade die Gruppen.

Genauso kann man zum Beispiel die Axiome für Halbordnungen hinschreiben:

- $\forall x_1 \; R_2^2(x_1, x_1)$
- $\forall x_1 \; \forall x_2 \; (R_2^2(x_1, x_2) \land R_2^2(x_2, x_1) \Rightarrow x_1=x_2)$
- $\forall x_1 \; \forall x_2 \; \forall x_3 \; (R_2^2(x_1, x_2) \land R_2^2(x_2, x_3) \Rightarrow R_2^2(x_1, x_3))$

In allen normalen Modellen wird die Interpretation $\mathcal{I}(R_2^2)$ eine Halbordnung sein.

Zum Abschluss wollen wir noch auf eine besondere Art von Interpretationen hinweisen. Die Idee dafür geht auf den Mathematiker Jacques Herbrand (12.2.1908 – 27.7.1931) zurück. Dazu sei eine Theorie gegeben, die mindestens ein Konstantensymbol enthalte.

- Als Universum U wählt man die Menge H aller Terme, die man aus allen Konstanten- und Funktionssymbolen der Theorie bilden kann (Variablensymbole sind nicht erlaubt).
- Die Interpretation $f_i^k = \mathcal{I}(\mathtt{f}_i^k)$ eines k-stelligen Funktionssymbols $\mathtt{f}_i^k$ ist $f_i^k : H^k \to H$ mit

$$f_i^k(t_1, \dots, t_k) = \mathtt{f}_i^k\mathtt{(}t_1\mathtt{,} \dots \mathtt{,}t_k\mathtt{)}$$

- Die Interpretation $R_i^k = \mathcal{I}(\mathtt{R}_i^k)$ eines k-stelligen Relationssymbols $\mathtt{R}_i^k$ ist $R_i^k \subseteq H^k$ mit

$$R_i^k = \{\mathtt{(}t_1\mathtt{,} \dots \mathtt{,}t_k\mathtt{)} \mid \mathtt{R}_i^k\mathtt{(}t_1\mathtt{,} \dots \mathtt{,}t_k\mathtt{)} \text{ ist beweisbar}\}$$

Machen Sie sich bitte unbedingt klar, dass wir eben keine Trivialitäten hingeschrieben haben. Die Abbildung f_i^k ist etwas anderes als ein einzelnes Funktionssymbol $\mathtt{f}_i^k$, und die Relation R_i^k ist etwas anderes als ein einzelnes Relationssymbol $\mathtt{R}_i^k$. Ein Beispiel macht dies noch deutlicher.

Betrachten wir den Fall, dass in der Theorie nur ein einziges Konstantensymbol $\mathtt{c}_1$ und ein einziges Funktionssymbol $\mathtt{f}_1^1$ vorkommt. Dann besteht das Universum H aus den folgenden Termen:

$$\begin{aligned} H = \{&\mathtt{c}_1, \\ &\mathtt{f}_1^1\mathtt{(c_1)}, \\ &\mathtt{f}_1^1\mathtt{(f_1^1(c_1))}, \\ &\mathtt{f}_1^1\mathtt{(f_1^1(f_1^1(c_1)))}, \\ &\mathtt{f}_1^1\mathtt{(f_1^1(f_1^1(f_1^1(c_1))))}, \\ &\dots\} \end{aligned}$$

Die Interpretation des einstelligen Funktionssymbols $\mathtt{f}_1^1$ ist eine einstellige Funktion $s : H \to H$, für die zum Beispiel gilt:

$$\begin{aligned} s(\mathtt{c}_1) &= \mathtt{f}_1^1\mathtt{(c_1)} \\ s(\mathtt{f}_1^1\mathtt{(c_1)}) &= \mathtt{f}_1^1\mathtt{(f_1^1(c_1))} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Man kann zeigen: Wenn eine Theorie überhaupt ein Modell besitzt, dann ist die Herbrand-Interpretation ein Modell.

18.5 Grenzen von Prädikatenlogik erster Stufe

Aus dem eben erwähnten Ergebnis zu Herbrand-Interpretationen ergibt sich sofort ein erstes Beispiel für eine Beschränkung von Prädikatenlogik erster Stufe. Das Herbrand-Universum besteht immer nur aus abzählbar unendlich vielen Elementen. Folglich muss es unmöglich sein, in Prädikatenlogik erster Stufe Axiome hinzuschreiben, deren einziges Modell die reellen Zahlen sind.

Andererseits kann man zeigen, dass jede Theorie, die überhaupt ein Modell besitzt, immer auch Modelle beliebig großer Kardinalität besitzt. Es kann also auch nicht möglich sein, in Prädikatenlogik erster Stufe Axiome hinzuschreiben, deren einziges

Modell die natürlichen Zahlen sind. Die Peano-Axiome sind also nicht in Prädikatenlogik erster Stufe formulierbar.

Es zeigt sich, dass dabei sogar soviel Ausdruckskraft fehlt, dass man noch nicht einmal erzwingen kann, dass die natürlichen Zahlen das einzige Modell mit abzählbar unendlich großem Universum sind.

18.6 ausblick