Grundbegriffe der Informatik

Einheit 18: Logik

Thomas Worsch

Universität Karlsruhe, Fakultät für Informatik

Wintersemester 2008/2009

Formeln in Prädikatenlogik erster Stufe

Theorien und Beweisbarkeit

Interpretationen und Modelle für geschlossene Formeln

Beispiele für Modelle für geschlossene Formeln

Grenzen von Prädikatenlogik erster Stufe

Überblick

Formeln in Prädikatenlogik erster Stufe

Theorien und Beweisbarkeit

Interpretationen und Modelle für geschlossene Formeln

Beispiele für Modelle für geschlossene Formeln

Grenzen von Prädikatenlogik erster Stufe

Das Vokabular für Prädikatenlogik erster Stufe

- *Variablensymbole* $\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \mathtt{x}_3, \ldots$
- *Konstantensymbole* $\mathtt{c}_1, \mathtt{c}_2, \mathtt{c}_3, \ldots$
- *k-stellige Funktionssymbole* $\mathtt{f}^{\mathtt{k}}_1, \mathtt{f}^{\mathtt{k}}_2, \mathtt{f}^{\mathtt{k}}_3, \ldots$ (für jedes $k \in \mathbb{N}_+$)
- *k-stellige Relationssymbole* $\mathtt{R}^{\mathtt{k}}_1, \mathtt{R}^{\mathtt{k}}_2, \mathtt{R}^{\mathtt{k}}_3, \ldots$ (für jedes $k \in \mathbb{N}_+$)
- *logische Konnektiven* $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\Rightarrow$,
- Klammern (und) und Komma , sowie
- Quantoren $\forall$ und $\exists$

- unendlich viele Symbole, damit man immer genug hat, aber
- in konkreten Fällen (oft) endlich viele Symbole jeder Art ausreichend.

Syntax prädikatenlogischer Formeln erster Stufe

Definition in drei Schritten

- Terme
- atomare Formeln
- Formeln

Syntax von Termen

- Jedes Variablensymbol ist ein Term.
- Jedes Konstantensymbol ist ein Term.
- Wenn f ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $t_1, \ldots, t_k$ k Terme sind, dann ist auch $f(t_1, \ldots, t_k)$ ein Term.
- Nichts anderes sind Terme.
- Terme ohne Variablensymbole heißen *Grundterme*.

Beispiele

- $\mathtt{x}_1$, $\mathtt{x}_3$, $\mathtt{x}_{42}$
- $\mathtt{c}_2$, $\mathtt{c}_{42}$, $\mathtt{c}_{4711}$
- $\mathtt{f}_1^1(\mathtt{x}_1)$
- $\mathtt{f}_1^2(\mathtt{c}_3,\mathtt{c}_2)$
- $\mathtt{f}_1^2(\mathtt{f}_1^1(\mathtt{x}_1),\mathtt{f}_1^2(\mathtt{c}_3,\mathtt{x}_2))$

Syntax atomarer Formeln

- Wenn R ein k-stelliges Relationssymbol ist und t_1, ..., t_k Terme sind, dann ist $R\texttt{(}t_1\texttt{,} \ldots \texttt{,}t_k\texttt{)}$ eine atomare Formel.
- Nichts anderes sind atomare Formeln.

Beispiele

- $\mathtt{R}^1_1\mathtt{(x_1)}$
- $\mathtt{R}^2_1\mathtt{(c_3,x_2)}$
- $\mathtt{R}^2_1\mathtt{(f^1_1(x_1),f^2_1(c_3,x_2))}$

Syntax prädikatenlogischer Formeln

- Jede atomare Formel ist Formel.
- Wenn $\mathcal{F}$ eine Formel ist, dann ist auch $(\neg\mathcal{F})$ eine Formel.
- Wenn $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ Formeln sind, dann sind auch $(\mathcal{F}_1\wedge\mathcal{F}_2)$, $(\mathcal{F}_1\vee\mathcal{F}_2)$ und $(\mathcal{F}_1\Rightarrow\mathcal{F}_2)$ Formeln.
- Wenn $\mathcal{F}$ eine Formel ist und x ein Variablensymbol, dann sind auch $(\forall x\ \mathcal{F})$ und $(\exists x\ \mathcal{F})$ Formeln.
- Nichts anderes sind Formeln.

Beispiele

- Bei der Klammersetzung ist man großzügig.
- $(\neg \mathtt{R}_5^2(\mathtt{x}_2,\mathtt{x}_7))$
- $\mathtt{R}_1^1(\mathtt{x}_6)\Rightarrow(\neg \mathtt{R}_5^2(\mathtt{x}_2,\mathtt{x}_7))$
- $\exists \mathtt{x}_2\ (\mathtt{R}_1^1(\mathtt{x}_6)\Rightarrow(\neg \mathtt{R}_5^2(\mathtt{x}_2,\mathtt{x}_7)))$

Formeln in Prädikatenlogik erster Stufe

Theorien und Beweisbarkeit

Interpretationen und Modelle für geschlossene Formeln

Beispiele für Modelle für geschlossene Formeln

Grenzen von Prädikatenlogik erster Stufe

Theorien

- Axiome: prädikatenlogische Formeln
  - allgemeingültige Aussagen wie $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathcal{F}_1$
  - theoriespezifische Axiome
- Ableitungsregeln
  - erlauben aus schon bewiesenen Formeln weitere zu folgern

- *Beweis*
  - endliche Folge von Formeln F_1, F_2, ..., F_k, wobei
  - jedes F_i ist
    - Axiom
    - folgt mittels einer Ableitungsregel aus vorherigen Formeln mit kleineren Nummern
- *Theorie*
  - endliche viele Konstanten- und Funktionssymbole
  - mindestens ein Relationssymbol
  - Axiome
  - interessant: die Theoreme, d. h.
    - die Menge aller aus den Axiomen ableitbaren Formeln

Ableitungsregeln

- in der Prädikatenlogik üblicherweise zwei Ableitungsregeln
  - Modus ponens
  - Generalisierung

- hier nur Modus ponens genauer:
  - Wenn schon Formel $\mathcal{F}_1$ bewiesen und
  - wenn schon Formel $\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2$ bewiesen
  - dann auch Formel $\mathcal{F}_2$ ableitbar

Algorithmische Probleme

- gegeben:
  - Axiome und Ableitungsregeln
  - eine Formel $\mathcal{F}$
- Frage: Ist die Formel $\mathcal{F}$ in der Theorie beweisbar?
- Das ist unentscheidbar.

Formeln in Prädikatenlogik erster Stufe

Theorien und Beweisbarkeit

Interpretationen und Modelle für geschlossene Formeln

Beispiele für Modelle für geschlossene Formeln

Grenzen von Prädikatenlogik erster Stufe

Abgeschlossene Formeln

- Eine Formel heißt *abgeschlossen*,
  - wenn jedes Vorkommen eines Variablensymbols $\mathtt{x}_i$ in einer Teilformel liegt,
  - die die Form $(\forall \mathtt{x}_i \mathcal{F})$ oder die Form $(\exists \mathtt{x}_i \mathcal{F})$ hat.
- Im folgenden beschränken wir uns auf abgeschlossene Formeln.

Interpretationen

- Eine *Interpretation* für eine Formel(menge) ist gegeben durch
  - Menge U, das sogenannte *Universum*,
  - Element $\mathcal{I}(\mathtt{c}_i) \in U$ für jedes Konstantensymbol $\mathtt{c}_i$,
  - k-stellige Abbildung $\mathcal{I}(\mathtt{f}_i^k) : U^k \to U$ für jedes k-stellige Funktionssymbol $\mathtt{f}_i^k$ und
  - k-stellige Relation $\mathcal{I}(\mathtt{R}_i^k) \subseteq U^k$ für jedes k-stellige Relationssymbol $\mathtt{R}_i^k$.

- Mitteilung: Jede geschlossene Formel ist in einer gegebenen Interpretation stets wahr oder falsch.

Interpretationen: Beispiel

- Formel

$$\forall \mathtt{x}_1\ \mathtt{R}_1^2(\mathtt{f}_1^2(\mathtt{x}_1,\mathtt{c}_1),\mathtt{x}_1) \land \forall \mathtt{x}_1\ \mathtt{R}_1^2(\mathtt{f}_1^2(\mathtt{c}_1,\mathtt{x}_1),\mathtt{x}_1)$$

- in der Interpretation
  - $U = \mathbb{N}_0$
  - $\mathcal{I}(\mathtt{c}_1) = 0$
  - $\mathcal{I}(\mathtt{f}_1^2) =$ Addition
  - $\mathcal{I}(\mathtt{R}_1^2) =$ Gleichheit

  ist die Formel wahr: 0 neutrales Element bezüglich $+$

Interpretationen: Beispiel

- Formel

$$\forall \mathtt{x}_1\ \mathtt{R}_1^2(\mathtt{f}_1^2(\mathtt{x}_1,\mathtt{c}_1),\mathtt{x}_1) \wedge \forall \mathtt{x}_1\ \mathtt{R}_1^2(\mathtt{f}_1^2(\mathtt{c}_1,\mathtt{x}_1),\mathtt{x}_1)$$

- in der Interpretation
  - $U = \mathbb{N}_0$
  - $\mathcal{I}(\mathtt{c}_1) = 1$
  - $\mathcal{I}(\mathtt{f}_1^2) =$ Addition
  - $\mathcal{I}(\mathtt{R}_1^2) =$ Gleichheit

  ist die Formel falsch: es ist *nicht* $x + 1 = x$

Interpretationen: Beispiel

- Formel

$$\forall \mathtt{x}_1\, \mathtt{R}_1^2(\mathtt{f}_1^2(\mathtt{x}_1,\mathtt{c}_1),\mathtt{x}_1) \land \forall \mathtt{x}_1\, \mathtt{R}_1^2(\mathtt{f}_1^2(\mathtt{c}_1,\mathtt{x}_1),\mathtt{x}_1)$$

- in der Interpretation
  - $U = \mathbb{N}_0$
  - $\mathcal{I}(\mathtt{c}_1) = 0$
  - $\mathcal{I}(\mathtt{f}_1^2) =$ Multiplikation
  - $\mathcal{I}(\mathtt{R}_1^2) =$ Gleichheit

  ist die Formel falsch: es ist z. B. *nicht* $0 \cdot 1 = 1$

Interpretationen: Beispiel

- Formel

$$\forall \mathtt{x}_1\ \mathtt{R}_1^2(\mathtt{f}_1^2(\mathtt{x}_1,\mathtt{c}_1),\mathtt{x}_1) \wedge \forall \mathtt{x}_1\ \mathtt{R}_1^2(\mathtt{f}_1^2(\mathtt{c}_1,\mathtt{x}_1),\mathtt{x}_1)$$

- in der Interpretation
  - $U = \mathbb{N}_0$
  - $\mathcal{I}(\mathtt{c}_1) = 0$
  - $\mathcal{I}(\mathtt{f}_1^2) =$ Addition
  - $\mathcal{I}(\mathtt{R}_1^2) =$ Ungleichheit

  ist die Formel falsch: es ist z. B. *nicht* $0 + 0 \neq 0$

Interpretationen: Beispiel

- Formel

$$\forall \mathtt{x}_1\ \mathtt{R}_1^2(\mathtt{f}_1^2(\mathtt{x}_1,\mathtt{c}_1),\mathtt{x}_1) \wedge \forall \mathtt{x}_1\ \mathtt{R}_1^2(\mathtt{f}_1^2(\mathtt{c}_1,\mathtt{x}_1),\mathtt{x}_1)$$

- in der Interpretation
  - $U = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$
  - $\mathcal{I}(\mathtt{c}_1) = \varepsilon$
  - $\mathcal{I}(\mathtt{f}_1^2) =$ Konkatenation
  - $\mathcal{I}(\mathtt{R}_1^2) =$ Identität

  ist die Formel wahr: ε neutrales Element bezüglich $\cdot$

Modelle

- Eine Interpretation ist *Modell* für eine Menge abgeschlossener Formeln, wenn jede der Formeln in der Interpretation wahr ist.

- Ein *normales Modell* ist ein Modell, bei dem $\mathtt{R}_1^2$ als Identität interpretiert wird
  - im folgenden ausschließlich normale Modelle
  - schreiben statt $\mathtt{R}_1^2$ deutlicher $=$

Beweise sind Beweise „für alle Modelle“

- Manchmal interessiert „nur“ genau eine Interpretation
  - Mathematik: (in den ersten Wochen) nur Universum $U = \mathbb{R}$
- Wenn etwas bewiesen wurde, dann etwas über die reellen Zahlen.
- Jedenfalls wurde vermutlich so getan.

- *Alle* Ableitungsregeln haben die Eigenschaft:
  - Wenn die Formeln, die Voraussetzung sind, in einer Interpretation wahr sind,
  - dann auch die Formel, die mit Hilfe der Ableitungsregel folgt.
- Konsequenz: Jedes Modell aller Axiome ist auch Modell aller Theoreme.

- Axiom

$$\forall \mathtt{x}_1\ \mathtt{f}_1^2(\mathtt{x}_1,\mathtt{c}_1)=\mathtt{x}_1 \wedge \forall \mathtt{x}_1\ \mathtt{f}_1^2(\mathtt{c}_1,\mathtt{x}_1)=\mathtt{x}_1$$

  (und weitere ...)
- mit Hilfe endlicher vieler Ableitungsschritte folgt:

$$\forall \mathtt{x}_2\ (\ (\forall \mathtt{x}_1\ \mathtt{f}_1^2(\mathtt{x}_1,\mathtt{x}_2)=\mathtt{x}_1 \wedge \forall \mathtt{x}_1\ \mathtt{f}_1^2(\mathtt{x}_2,\mathtt{x}_1)=\mathtt{x}_1) \Rightarrow \mathtt{x}_2=\mathtt{c}_1\ )$$

- Was bedeutet das?
  - obere Formel: $\mathcal{I}(\mathtt{c}_1)$ neutrales Element bzgl. $\mathcal{I}(\mathtt{f}_1^2)$
  - untere Formel: Ein solches neutrales Element ist eindeutig.
- Untere Formel gilt in allen Modellen der oberen Formel.
- Ein solches neutrales Element ist also *immer* eindeutig.

Überblick

Formeln in Prädikatenlogik erster Stufe

Theorien und Beweisbarkeit

Interpretationen und Modelle für geschlossene Formeln

Beispiele für Modelle für geschlossene Formeln

Grenzen von Prädikatenlogik erster Stufe

Gruppen

- Axiome:
  - $\forall x_1\ \forall x_2\ \forall x_3\ f_1^2(x_1,f_1^2(x_2,x_3))=f_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_3)$
  - $\forall x_1\ (f_1^2(x_1,c_1)=x_1 \wedge f_1^2(c_1,x_1)=x_1)$
  - $\forall x_1\ \exists x_2\ (f_1^2(x_1,x_2)=c_1 \wedge f_1^2(x_2,x_1)=c_1)$
- Bedeutung:
  - assoziative Operation
  - neutrales Element
  - inverse Elemente
- normale Modelle: alle Gruppen

- Axiome:
  - $\forall x_1 \; R^2_2(x_1, x_1)$
  - $\forall x_1 \; \forall x_2 \; (R^2_2(x_1, x_2) \wedge R^2_2(x_2, x_1) \Rightarrow x_1 = x_2)$
  - $\forall x_1 \; \forall x_2 \; \forall x_3 \; (R^2_2(x_1, x_2) \wedge R^2_2(x_2, x_3) \Rightarrow R^2_2(x_1, x_3))$
- Bedeutung:
  - reflexive Relation
  - antisymmetrische Relation
  - transitive Relation
- normale Modelle: alle Halbordnungen

Jacques Herbrand

- Jacques Herbrand (12.2.1908 – 27.7.1931)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Herbrand.jpg

- bei einer Bergtour verunglückt

Herbrand-Modelle

- gegeben: Theorie mit mindestens einem Konstantensymbol
- Universum: Menge H aller Grundterme
  - alle Terme aus Konstanten- und Funktionssymbolen
  - Variablensymbole sind nicht erlaubt
- Die Interpretation $f_i^k = \mathcal{I}(\mathtt{f}_i^k)$ eines k-stelligen Funktionssymbols $\mathtt{f}_i^k$ ist $f_i^k : H^k \to H$ mit

$$f_i^k(t_1, \ldots, t_k) = \mathtt{f}_i^k\mathtt{(}t_1\mathtt{,}\ \ldots\ \mathtt{,}t_k\mathtt{)}$$

- Die Interpretation $R_i^k = \mathcal{I}(\mathtt{R}_i^k)$ eines k-stelligen Relationssymbols $\mathtt{R}_i^k$ ist $R_i^k \subseteq H^k$ mit

$$R_i^k = \{\mathtt{(}t_1\mathtt{,}\ \ldots\ \mathtt{,}t_k\mathtt{)} \mid \mathtt{R}_i^k\mathtt{(}t_1\mathtt{,}\ \ldots\ \mathtt{,}t_k\mathtt{)} \text{ ist beweisbar}\}$$

- Achtung
  - Hier stehen keine Trivialitäten!
  - Unterscheide Symbole und ihre Interpretationen!

Herbrand-Modell: Beispiel

- ein einziges Konstantensymbol $\mathtt{c}_1$ und
- ein einziges Funktionssymbol $\mathtt{f}_1^1$
- Herbrand-Universum:

$$
\begin{aligned}
H = \{&\mathtt{c}_1,\\
&\mathtt{f}_1^1(\mathtt{c}_1),\\
&\mathtt{f}_1^1(\mathtt{f}_1^1(\mathtt{c}_1)),\\
&\mathtt{f}_1^1(\mathtt{f}_1^1(\mathtt{f}_1^1(\mathtt{c}_1))),\\
&\mathtt{f}_1^1(\mathtt{f}_1^1(\mathtt{f}_1^1(\mathtt{f}_1^1(\mathtt{c}_1)))),\\
&\ldots\}
\end{aligned}
$$

- Die Interpretation des einstelligen Funktionssymbols $\mathtt{f}_1^1$ ist eine einstellige Funktion $s : H \to H$, für die zum Beispiel gilt:

$$
\begin{aligned}
s(\mathtt{c}_1) &= \mathtt{f}_1^1(\mathtt{c}_1)\\
s(\mathtt{f}_1^1(\mathtt{c}_1)) &= \mathtt{f}_1^1(\mathtt{f}_1^1(\mathtt{c}_1))\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Herbrand-Modelle

- Wenn eine Theorie überhaupt ein Modell besitzt, dann ist die Herbrand-Interpretation ein Modell.

Überblick

Formeln in Prädikatenlogik erster Stufe

Theorien und Beweisbarkeit

Interpretationen und Modelle für geschlossene Formeln

Beispiele für Modelle für geschlossene Formeln

Grenzen von Prädikatenlogik erster Stufe

Beispiel 1

- Herbrand-Modell: Wenn eine Theorie überhaupt ein Modell besitzt, dann eines Modell mit abzählbar unendlich vielen Elementen.
- Also ist es unmöglich, in Prädikatenlogik erster Stufe Axiome hinzuschreiben, deren einziges Modell die reellen Zahlen sind.

Beispiel 2

- Mitteilung: Jede Theorie, die überhaupt ein Modell besitzt, hat immer auch Modelle beliebig großer Kardinalität.
- Es ist also nicht möglich, in Prädikatenlogik erster Stufe Axiome hinzuschreiben, deren einziges Modell die natürlichen Zahlen sind.
- Die Peano-Axiome sind also nicht in Prädikatenlogik erster Stufe formulierbar.
  - Das Axiom für die vollständige Induktion spricht über Teilmengen des Universum, nicht über Elemente.

Beispiel 3

- Mitteilung: Man kann noch nicht einmal erzwingen, dass die natürlichen Zahlen das einzige Modell mit abzählbar unendlich großem Universum sind.

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- Prädikatenlogik erster Stufe erlaubt es, die Axiome für manche Typen algebraischer Strukturen hinzuschreiben.
- Man kann die Ableitungsregeln für Beweise so wählen, dass Beweisbarkeit und Wahrheit in allen Modellen übereinstimmen.

Das sollten Sie üben:

- ganz „normale“ Beweise