

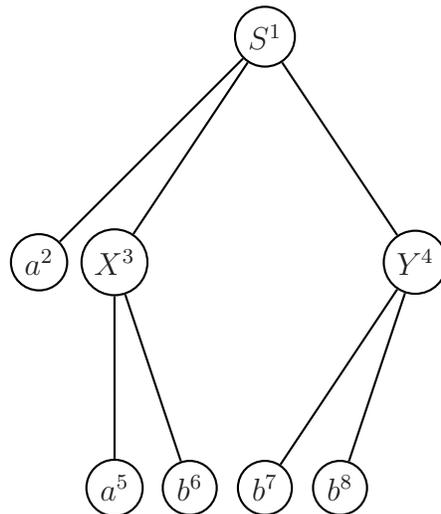
## Einführung in die Informatik

### Lösungen zu Übungsblatt 9

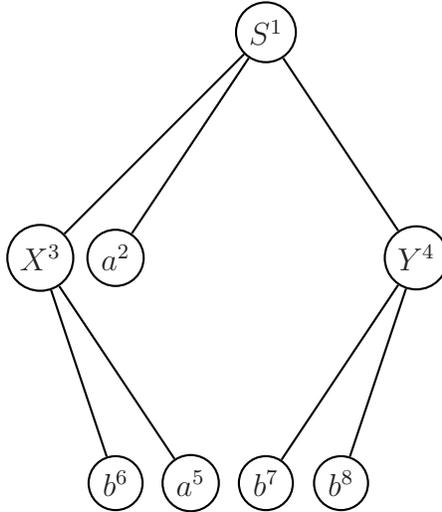
– Kontextfreie Grammatiken –

#### Aufgabe 1:

a) Der Ableitungsbaum hat folgende Gestalt:



- b) Eine Grammatik, die sich aus der Betrachtung des oben gegebenen Baumes ergibt, wäre  $G = (N, T, S, P)$  mit  $N = \{S, X, Y\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $P = \{S \rightarrow aXY, X \rightarrow ab, Y \rightarrow bb\}$ .
- c) Das abgeleitete Wort, wenn man die  $G$  zu Grunde legt, ist  $aabbb$ .
- d) Der Ableitungsbaum sieht wie folgt aus:



Die hochgestellten Zahlen geben die Nummerierung an, so dass dieser Ableitungsbaum die in der Aufgabenstellung gegebene Adjazenzmatrix besitzt.

- e) Aus der Adjazenzmatrix, die einen *Baum* vollständig beschreibt, lässt sich nicht eindeutig ablesen, welcher *Ableitungsbaum* durch sie beschrieben wird. Somit ist ein Ableitungsbaum kein Baum im engeren Sinne, weist jedoch eine baumartige Struktur auf.

Wesentlich bei einem Ableitungsbaum ist die *Reihenfolge* der Knoten, die von einem inneren Knoten aus über eine Kante erreichbar sind. Diese zusätzliche Struktur ist bei einem Graphen nicht gegeben.

## Aufgabe 2:

- a) Die erzeugte Sprache ist  $\{a^n b^m c^{n+m} | n, m \geq 1\}$ .  
 b) Sei  $a^n b^m c^{n+m}$  ein Wort aus der angegebenen Sprache.

Wir zeigen:

- Aus  $S$  ist jedes Wort  $a^{n-1} S c^{n-1}$ ,  $n \geq 1$  ableitbar.
- Aus  $a^{n-1} S c^{n-1}$  ist das Wort  $a^n R c^n$  ableitbar.
- Aus  $a^n R c^n$  ist jedes Wort  $a^n b^{m-1} R c^{n+m-1}$ ,  $m \geq 1$  ableitbar.
- Aus  $a^n b^{m-1} R c^{n+m-1}$  ist das Wort  $a^n b^m c^{n+m}$  ableitbar.

Damit wäre dann die Behauptung gezeigt.

- $n = 1$ :  $S$  ist das Wort  $a^{n-1}Sc^{n-1}$ , von daher ist  $a^{n-1}Sc^{n-1}$  aus  $S$  ableitbar.  
 $n \rightarrow n + 1$ : Ersetzt man im Wort  $a^{n-1}Sc^{n-1}$   $S$  durch  $aSc$ , so ergibt sich das Wort  $a^nSc^n$ . Von daher ist auch  $a^nSc^n$  aus  $S$  ableitbar.
- Ersetzt man im Wort  $a^{n-1}Sc^{n-1}$  das Nichtterminal  $S$  durch  $aRc$ , so ergibt sich das Wort  $a^nRc^n$ .
- $m = 1$ :  $a^nRc^n$  ist  $a^nb^{m-1}Rc^{n+m-1}$ , von daher ist  $a^nb^{m-1}Rc^{n+m-1}$  aus  $a^nRc^n$  ableitbar.  
 $m \rightarrow m + 1$ : Ersetzt man im Wort  $a^nb^{m-1}Rc^{n+m-1}$   $R$  durch  $bRc$ , so ergibt sich das Wort  $a^nb^mRc^{n+m}$ . Von daher ist auch  $a^nb^mRc^{n+m}$  aus  $a^nRc^n$  ableitbar.
- Aus  $a^nb^{m-1}Rc^{n+m-1}$  ist das Wort  $a^nb^mc^{n+m}$  ableitbar, indem man  $r$  durch  $bc$  ersetzt.

Damit ist jedes Wort der Form  $a^nb^mc^{n+m}$  aus  $S$  ableitbar und liegt somit in  $L(G)$ .

- c) Um das Wort  $a^nb^mc^{n+m}$  abzuleiten, muss man zuerst  $S$   $n - 1$  mal durch  $aSc$  ersetzen, danach einmal durch  $aRc$ . Anschließend muss man  $m - 1$  mal  $R$  durch  $bRc$  und einmal durch  $bc$  ersetzen.

Dies ist die einzige Möglichkeit,  $a^nb^mc^{n+m}$  abzuleiten, es gibt also nur eine mögliche Ableitung für jedes Wort in  $L(G)$ .

### Aufgabe 3:

- a) Grob gesagt: Aus  $S_1$  kann man die Wörter  $aS_1bS_1$  und  $\epsilon$  ableiten:  $S_1 \Rightarrow S_1S_1 \Rightarrow aS_1bS_1$ ,  $S_1 \rightarrow \epsilon$ . Indem man für eine Ableitung  $S_2 \Rightarrow^* w \in \{a, b\}^*$  jeden Ableitungsschritt  $S_2 \rightarrow aS_2bS_2$  durch die Ableitung  $S_1 \Rightarrow S_1S_1 \Rightarrow aS_1bS_1$  und jeden Ableitungsschritt  $S_2 \rightarrow \epsilon$  durch  $S_1 \rightarrow \epsilon$  ersetzt, erhält man die entsprechende Ableitung  $S_1 \Rightarrow^* w$ .

Formaler: Wir definieren die Funktion  $c : \{a, b, S_2\}^* \rightarrow \{a, b, S_1\}^*$  rekursiv durch  $c(\epsilon) = \epsilon$ ,  $c(wa) = c(w)a$ ,  $c(wb) = c(w)b$ ,  $c(wS_2) = c(w)S_1$  für  $w \in \{a, b, S_2\}^*$ .

Es gilt dann: Für  $w \in \{a, b\}^*$  gilt  $c(w) = w$  und für Wörter  $w_1, w_2 \in \{a, b, S_2\}^*$  gilt  $c(w_1w_2) = c(w_1)c(w_2)$ .

Wir zeigen: Wenn  $w \in \{a, b, S_2\}^*$  aus  $S_2$  ableitbar ist, ist  $c(w)$  aus  $S_1$  ableitbar. Da die Wörter in  $L(G_2)$  genau die Wörter sind, die sich aus  $S_2$  ableiten lassen und nur Terminalsymbole enthalten, und für Wörter  $w$ , die nur Terminalsymbole enthalten,  $c(w) = w$  gilt, folgt die Behauptung.

Sei  $w$  in einem Schritt aus  $S_2$  ableitbar. Dann gilt  $w = \epsilon$  oder  $w = aS_2bS_2$ .

Es existieren die Ableitungen  $S_1 \Rightarrow \epsilon = c(\epsilon)$  und  $S_1 \Rightarrow S_1S_1 \Rightarrow aS_1bS_1 = c(aS_2bS_2)$ . Damit ist der Induktionsanfang gezeigt.

Sei  $w = w_1S_2w_2$  ein aus  $S_2$  ableitbares Wort, bei dem im nächsten Schritt das  $S_2$  zwischen  $w_1$  und  $w_2$  ersetzt wird. Falls  $S_2$  durch  $\epsilon$  ersetzt wird, ergibt sich das Wort  $w_1w_2$ , falls  $S_2$  durch  $aS_2bS_2$  ersetzt wird, ergibt sich das Wort  $w_1aS_2bS_2w_2$ .

Nach Induktionsvoraussetzung ist  $c(w_1S_2w_2) = c(w_1)S_1c(w_2)$  aus  $S_1$  ableitbar. Dann ist auch, durch Ersetzung des angegebenen  $S_1$  durch  $\epsilon$ , das Wort  $c(W_1)c(w_2) = c(w_1w_2)$  aus  $S_1$  ableitbar. Weiterhin ist das Wort  $c(w_1)aS_1bS_1c(w_2) = c(w_1aS_2bS_2w_2)$  aus  $c(w_1)S_1c(w_2)$  ableitbar:

$$c(w_1)S_1c(w_2) \Rightarrow c(w_1)S_1S_1c(w_2) \Rightarrow c(w_1)aS_1bS_1c(w_2).$$

Damit ist Behauptung per Induktion gezeigt.

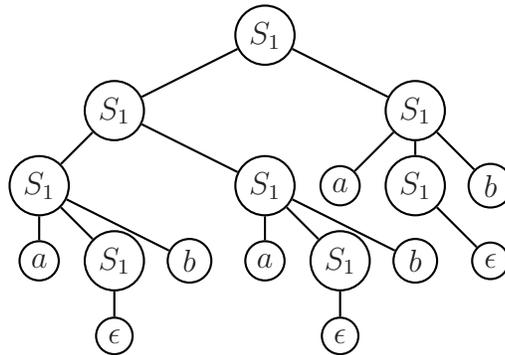
b) Linksableitung  $G_1: S_1 \Rightarrow S_1S_1 \Rightarrow S_1S_1S_1 \Rightarrow aS_1bS_1S_1 \Rightarrow abS_1S_1 \Rightarrow abaS_1bS_1 \Rightarrow ababS_1 \Rightarrow ababaS_1b \Rightarrow ababab$

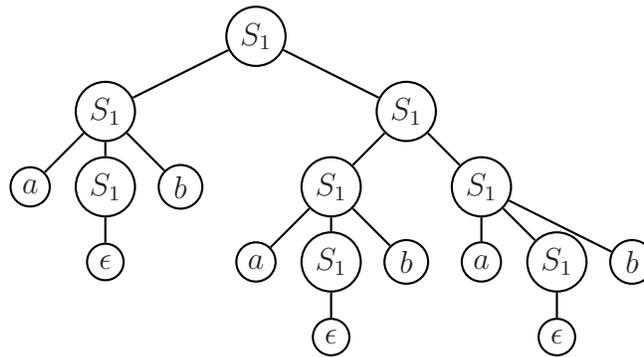
Rechtsableitung  $G_1: S_1 \Rightarrow S_1S_1 \Rightarrow S_1S_1S_1 \Rightarrow S_1S_1aS_1b \Rightarrow S_1S_1ab \Rightarrow S_1aS_1bab \Rightarrow S_1abab \Rightarrow aS_1babab \Rightarrow ababab$

Linksableitung  $G_2: S_2 \Rightarrow aS_2bS_2 \Rightarrow abS_2 \Rightarrow abaS_2bS_2 \Rightarrow ababS_2 \Rightarrow ababaS_2bS_2 \Rightarrow abababS_2 \Rightarrow ababab$

Rechtsableitung  $G_2: S_2 \Rightarrow aS_2bS_2 \Rightarrow aS_2baS_2bS_2 \Rightarrow aS_2baS_2baS_2bS_2 \Rightarrow aS_2baS_2baS_2b \Rightarrow aS_2baS_2bab \Rightarrow aS_2babab \Rightarrow ababab$

c) Die ableitungsbäume sehen wie folgt aus:





d) Die oberste Zeile muss aus  $S_2$  bestehen. Die Produktion  $S_2 \rightarrow \epsilon$  kann nicht angewandt werden, da ansonsten  $ababab$  nicht erreicht werden kann.

Somit muss die zweite Zeile  $a S_2 b S_2$  lauten.

Das erste  $S_2$  kann nicht zu  $aS_2bS_2$  werden, da das abgeleitete Wort ansonsten mit 2  $a$  beginnen würde. Somit muss das erste  $S_2$  mit einem  $\epsilon$  verbunden sein.

Das zweite  $S_2$  kann nicht mit einem  $\epsilon$  verbunden sein, muss daher mit  $a S_2 b S_2$  verbunden sein.

Die dritte Zeile lautet somit  $\epsilon a S_2 b S_2$ .

Das erste  $S_2$  kann nicht zu  $aS_2bS_2$  werden, da das abgeleitete Wort ansonsten mit  $abaa$  beginnen würde. Somit muss das erste  $S_2$  mit einem  $\epsilon$  verbunden sein.

Das zweite  $S_2$  kann nicht mit einem  $\epsilon$  verbunden sein, muss daher mit  $a S_2 b S_2$  verbunden sein.

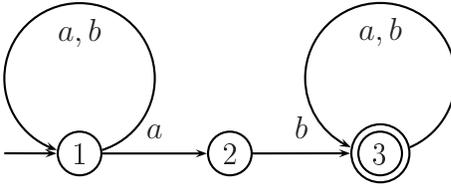
Die vierte Zeile lautet somit  $\epsilon a S_2 b S_2$ .

Die beiden  $S_2$  müssen jeweils mit  $\epsilon$  verbunden sein.

Somit ist der Ableitungsbaum eindeutig festgelegt.

#### Aufgabe 4:

a) Ein nichtdeterministischer Automat hat folgende Form:



b)  $G = (N, TS, P)$ ,  $N = \{S, Q\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $P = \{S \rightarrow QabQ, Q \rightarrow aQ|bQ|\epsilon\}$ .

Diese Grammatik erlaubt es, rechts und links des Teilwortes  $ab$  jedes beliebige Wort aus  $\{a, b\}^*$  zu erzeugen.

c)  $G = (N, TS, P)$ ,  $N = \{S\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $P = \{S \rightarrow ab|aS|bS|Sa|Sb\}$ .

Mit dieser Grammatik kann man links und rechts des Startsymbols beliebige Wörter erzeugen, um schließlich  $S$  durch  $ab$  zu ersetzen.

Allgemein für  $w$ :

$G = (N, TS, P)$ ,  $N = \{S\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $P = \{S \rightarrow w|aS|bS|Sa|Sb\}$