Universität Karlsruhe (TH)
Lehrstuhl Informatik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Dr. Thomas Worsch
Matthias Schulz

2. Juni 2008

Einführung in die Informatik

Lösungen zu Übungsblatt 6

– Reguläre Ausdrücke, Formale Sprachen –

Aufgabe 1:

a) Die Funktion N_x wird rekursiv über die Wortlänge definiert:

   $N_x(\epsilon) = 0$.

   Für ein Wort $w = vy$ der Länge n, wobei v die Länge $n-1$ hat und y ein Zeichen ist, gilt

   $$N_x(w) = N_x(vy) = N_x(v) + \begin{cases} 1 & \text{falls } y = x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Wir definieren R rekursiv über die Wortlänge:

   $R(\epsilon) = \epsilon$.

   Für ein Wort wy der Länge $n+1$, bei dem w die Länge n hat und y ein einzelnes Zeichen ist, gilt $R(wy) = yR(w)$.

Aufgabe 2:

a) $((a \cup b)(a \cup b))^*$

b) $(a(a \cup b)^*a) \cup a = a(b^*a)^*$ (Einzelnes a nicht vergessen!)

c) $a((a \cup b)(a \cup b))^*b$

d) $(a \cup b)^*a(a \cup b)(a \cup b)(a \cup b)(a \cup b)$

e) $(a \cup b)^*aba(a \cup b)^*$

f) $(b^*a^*abb)^*b^*a^*(\emptyset^* \cup ab) = b^*a^*(a \cup abbb^*)^*(\emptyset^* \cup ab)$

g) $(ab \cup ba)^*$

h) $aaa(a \cup b)^*$

i) $(a \cup b)^*(aaa \cup bbb)(a \cup b)^*$

j) $b^*ab^*ab^*ab^*ab^*$

Aufgabe 3:

a) $b, ab, aab, aaaab \in [R_1]$; $abb, aabb, aaba \notin [R_1]$.
$b, ab, aab, aaab \in [R_2]$; $ba, aba, abb, abab \notin [R_2]$.
$\epsilon, ab, ba, bbbaa \in [R_3]$; $abb, ba, aaba, bab \notin [R_3]$.
$ab, aab, abab, abbb, abb, \in [R_4]$; $bab, aa, aba, abbbaba \notin [R_4]$
$\epsilon, b, ba, bba, bbaaa, bbb, aa \in [R_5]$; $bab, aab, baab \notin [R_5]$
$\epsilon, b, ba, bba, bbaaa, bbb, aa \in [R_6]$; $bab, aab, baab \notin [R_6]$

b) $[R_1] = [R_2]$:
$[R_1] = [a^*b] = [a^*][b] = [a]^*[b] = \{a\}^*\{b\} = (\{a\} \cup \{a\}^*)\{b\}$ (da a in $\{a\}^*$ enthalten ist) $= ([a] \cup [a^*])[b] = [(a \cup a^*)b] = [R_2]$

$[R_5] = [R_6] = [b^*a^*]$:
$[b^*a^*]$ ist offensichtlich eine Teilmenge von $[R_5] = [aa^*] \cup [b^*a^*]$.

Andererseits gilt $[aa^*] \subseteq [a^*] \subseteq [b^*a^*]$.

Somit gilt $[aa^*] \subseteq [b^*a^*]$ und es folgt $[aa^* \cup b^*a^*] \subseteq [b^*a^*]$

Damit folgt $[R_5] = [b^*a^*]$.

$[a^*] \subseteq [b^*a^*]$ und $[bb^*a^*] \subseteq [b^*a^*]$.

Es folgt somit $[R_6] \subseteq [b^*a^*]$.

Sei $w \in [b^*a^*]$. Dann gibt es drei Fälle:

1) $w = \epsilon \in [a^*] \subseteq [R_6]$.
2) w beginnt mit a. Dann kann danach kein weiteres b mehr kommen, und es gilt $w \in [a^*] \subseteq [R_6]$.
3) w beginnt mit b. Danach können noch beliebuig viele b kommen, gefolgt von beliebig vielen a. Es gilt somit $w \in [bb^*a^*] \subseteq [R_6]$-

Da in jedem Fall $w \in [R_6]$ gilt, folgt $[b^*a^*] \subseteq [R_6]$ und es gilt $[R_6] = [b^*a^*] = [R_5]$.

Ansonsten sind keine zwei Ausdrücke äquivalent:

R_1 - R_3: $aab \in [R_1] \setminus [R_3]$
R_1 - R_4: $abb \in [R_4] \setminus [R_1]$
R_1 - R_5: $ab \in [R_1] \setminus [R_5]$
R_3 - R_4: $ba \in [R_3] \setminus [R_4]$
R_3 - R_5: $ab \in [R_3] \setminus [R_5]$
R_4 - R_5: $ab \in [R_4] \setminus [R_5]$

(Da $[R_1] = [R_2]$ und $[R_5] = [R_6]$ gilt, sind damit alle Fälle behandelt.)

Aufgabe 4:

a) Sei $w \in [S^*]$. Dann gibt es eine Zahl $k \geq 0$ und Wörter $w_1, \ldots, w_k \in [S]$ so dass $w = w_1 \cdots w_k$ gilt.

Da aber nach Voraussetzung jedes $w_i, 1 \leq i \leq k$ auch in $[R]$ liegt, folgt $w = w_1 \cdots w_k \in [R^*]$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

b) Da $[S] \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} [S]^i = [S]^* = [S^*]$ gilt, folgt aus Teil a): $[S^*] \subseteq [(S^*)^*]$.

Sei nun $w \in [(S^*)^*]$. Dann gibt es eine Zahl $k \geq 0$ und Wörter $w_1, \ldots w_k \in S^*$, so dass $w = w_1 \cdots w_k$ gilt.

Jedes dieser einzelnen Wörter w_i lässt sich in $k_i \geq 0$ Wörter $w_{i,1} \cdots w_{i,k_i} \in S$ zerlegen.

Somit lässt sich w darstellen als $w_{1,1} w_{1,2} \cdots w_{1,k_1} w_{2,1} \cdots w_{k,k_k} \in S^*$.

Somit gilt $[(S^*)^*] \subseteq [S^*]$, und die Behauptung folgt.

c) $[S \cup R] = [S] \cup [R] = [R] \cup [S] = [R \cup S]$.

d) $[R(S \cup T)] = [R][(S \cup T)] = [R]([S] \cup [T])$
$= \{uv : u \in [R], v \in [S] \cup [T]\} = \{uv : u \in [R], v \in [S] \vee v \in [T]\}$
$= \{uv : u \in [R], v \in [S]\} \cup \{uv : u \in [R], v \in [T]\} = [RS] \cup [RT] = [RS \cup RT]$

e) $[R^* S^*] \subseteq [(R \cup S)^*] \Rightarrow [(R^* S^*)^*] \subseteq [((R \cup S)^*)^*] = [(R \cup S)^*]$ nach a) und b).

Andererseits gilt $[R] = [R]^[S]^0 \subseteq [R]^* [S]^* = [R^* S^*]$ und $[S] = [R]^0 [S]^1 \subseteq [R]^* [S]^* = [R^* S^*]$ und es folgt $[R \cup S] \subseteq [R^* S^*] \Rightarrow [(R \cup S)^*] \subseteq [(R^* S^*)^*]$.

Damit ist die Behauptung gezeigt.