Universität Karlsruhe (TH)
Lehrstuhl Informatik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Dr. Thomas Worsch
Matthias Schulz

21. Mai 2007

Einführung in die Informatik

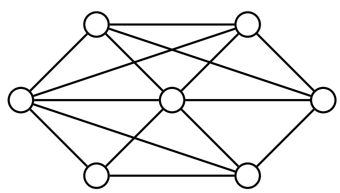
Übungsblatt 5

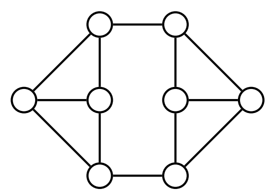
– Schwierige Probleme, Fibonacci-Zahlen –

Aufgabe 1: (Knotenüberdeckung)
Gegeben sei ein ungerichteter Graph $U = (V, E)$ mit $|V| = n$.

a) Entwerfen Sie einen heuristischen deterministischen Algorithmus, der eine kleine Knotenüberdeckung des Graphen bestimmt und dessen Laufzeit polynomiell in n ist. (Hinweis: Denken Sie an eine Heuristik, die Sie bereits kennen gelernt haben!)

b) Führen Sie die Heuristik für die folgenden Graphen durch. Ist das Ergebnis kleinstmöglich? Gibt es Probleme mit Ihrer Heuristik?





c) Zeigen Sie: Wenn eine Heuristik wie in a) für alle Graphen ein optimales Ergebnis liefert, ist **P**=**NP**. (Verwenden Sie die Tatsache, dass das Problem zu entscheiden, ob ein gegebener Graph eine Knotenüberdeckung mit höchstens k Knoten besitzt, **NP**-vollständig ist.)

Aufgabe 2: (Rekonfigurationsproblem)
Gegeben sei der folgende 6×9 Block, dessen fehlerhafte Bauteile mit X gekennzeichnet sind.

				X	X
X	X	X	X		
X					
	X				
		X			
			X		

Weiterhin stehen eine Ersatzzeile und vier Ersatzspalten zur Verfügung.

a) Wenden Sie den Greedy-Algorithmus auf obiges Problem an.

b) Finden Sie eine Rekonfigurierung, die alle fehlerhaften Bauteile ersetzt.

Aufgabe 3: (SAT) Das Problem SAT (Erfüllbarkeit) erhält als Eingabe eine aussagenlogische Formel in konjuktiver Normalform und fragt nach der Existenz einer erfüllenden Belegung.

a) Entwerfen Sie einen Greedy-Algorithmus für SAT!

b) Wenden Sie den Greedy-Algorithmus auf folgende Formel an:

$F_1 = (a \vee d \vee e) \wedge (a \vee f \vee g) \wedge (a \vee h \vee i) \wedge (a \vee j \vee k) \wedge (a \vee l \vee m)$
$\wedge (b \vee d \vee e) \wedge (b \vee f \vee g) \wedge (b \vee h \vee i) \wedge (b \vee j \vee k)$
$\wedge (c \vee d \vee e) \wedge (c \vee f \vee g) \wedge (c \vee h \vee i) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c})$.

Ist die Antwort der Heuristik korrekt? Geben Sie, wenn möglich, eine erfüllende Belegung für F an; wenn dies nicht möglich ist, begründen Sie, warum!

Aufgabe 4: (Fibonacci-Zahlen)
F_n sei die n-te Fibonacci-Zahl, also $F_1 = F_2 = 1$ und $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Zeigen Sie:

a) $2F_{n+2} = F_n + F_{n+3}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$.

c) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$ (Formel von Binet).

d) $\gcd(F_n, F_{n+1}) = 1$ (gcd = größter gemeinsamer Teiler).

e) Bonus: Gegeben seien die Zahlen G_n mit $G_1 = G_2 = 1$ und $G_{n+2} = G_{n+1} + 2G_n$. Finden Sie eine geschlossene Formel für G_n (ähnlich der Formel von Binet).

Abgabe bis zum **28. Mai 2007** in der Vorlesung oder im Tutorium.
Falls Sie eine Bearbeitung abgeben möchten, geben Sie bitte den Namen Ihres Tutors und Ihre Übungsgruppe an.