Universität Karlsruhe (TH)
Lehrstuhl Informatik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Dr. Thomas Worsch
Matthias Schulz

7. Mai 2007

Einführung in die Informatik

Übungsblatt 4

– Laufzeiten, Greedy-Algorithmen –

Aufgabe 1: (Wegematrix) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten. Gehen Sie davon aus, dass der Algorithmus von Strassen auch für Matrizen, deren Größe keine Zweierpotenz ist, einen Zeitaufwand von $O(n^{\log_2 7})$ benötigt.

a) Zeigen Sie: Für alle positiven ganzen Zahlen $m, c_1, \ldots, c_m$ gilt
$Sg(A_G + A_G^2 + \ldots + A_G^m) = Sg(\sum_{i=1}^m c_i A_G^i)$

b) Zeigen Sie: Für jedes $m \geq n$ gilt
$Sg(A_G + A_G^2 + \ldots + A_G^n) = Sg(A_G + A_G^2 + \ldots + a_G^m)$.

c) Sei I die Einheitsmatrix, die auf der Diagonale nur Einsen stehen hat und sonst überall 0.
Zeigen Sie: Für alle natürlichen Zahlen m gilt
$Sg((I+A_G)^m - I) = Sg(A_G + A_G^2 + \ldots A_G^m)$. (Hinweis: Verwenden Sie den binomischen Lehrsatz!).

d) Zeigen Sie, wie man für eine Matrix A die Matrix $A^{(2^k)}$ mit k Matrixmultiplikationen berechnen kann.

e) Geben Sie einen Algorithmus an, der für G die Wegematrix W_G berechnet und dafür einen Zeitaufwand in $O(\lceil \log_2 n \rceil \cdot n^{(\log_2 7)})$ benötigt.
Ist dieser Algorithmus schneller als der Algorithmus von Warshall?

Aufgabe 2: (Färbungen von Graphen)

a) Zeigen Sie: Jeder Baum ist zweifärbbar!

b) Ein berühmter Satz (Haken und Appel, 1976 mit Hilfe eines Computerprogramms bewiesen) besagt, dass jeder planare Graph 4-färbbar ist. Zeigen Sie: Die Umkehrung gilt nicht!

c) Finden Sie einen planaren Graphen, der nicht 3-färbbar ist.

d) Gegeben sei der Graph $U = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, 7\}$ und $E = \{\{u, v\} : u, v \in V \wedge |u - v| \notin \{2, 5\}\}$ Finden Sie das minimale k, so dass U k-färbbar ist..

Aufgabe 3: (Matroid) Bei welchen der folgenden Strukturen (E, U) handelt es sich um Matroide:

- $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $U = \{\emptyset\}$.
- $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$,
$$U = \left\{ \begin{array}{l} \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \\ \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_3, e_4\}, \\ \{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_4\}, \{e_1, e_3, e_4\}, \{e_2, e_3, e_4\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \end{array} \right\}.$$
- $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$,
$$U = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_5\}, \\ \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_5\}, \\ \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_2, e_5\}, \\ \{e_3, e_4\}, \{e_3, e_5\}, \{e_4, e_5\}, \\ \{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_4\}, \\ \{e_1, e_3, e_5\}, \{e_1, e_4, e_5\}, \\ \{e_2, e_3, e_4\}, \{e_2, e_3, e_5\}, \\ \{e_2, e_4, e_5\}, \{e_3, e_4, e_5\} \end{array} \right\}.$$

Aufgabe 4: (Greedy) Das Problem Bruchteilrucksack ist wie folgt definiert:

Gegeben: C die Kapazität des Wagens, $g_1, \ldots, g_n$ die Gewichte der Waren und $v_1, \ldots, v_n$ die Werte der Waren.

Gesucht: Eine Auswahl von Bruchteilen $a_1, \ldots, a_n$ mit $0 \leq a_i \leq 1$, so dass $\sum_{i=1}^{n} a_i g_i \leq C$ und $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ maximal wird.

a) Geben Sie eine optimale Lösung für die Werte

Objekt	a	b	c	d	e	f
Gewicht	3	3	5	5	9	6
Wert	6	5	9	8	12	9

und die Kapazitäten $C = 17$ und $C = 26$ an. [`autotool`: KSF-17, KSF-26. Probieren Sie auch die Aufgabe KSF!]

b) Geben Sie in einer (Pseudo-)Programmiersprache Ihrer Wahl den Programmtext einer Greedy-Lösung des Problems Bruchteilrucksack an!

c) Bonus: Zeigen Sie, dass eine Greedy-Planung zu einem optimalen Ergebnis führt!

Abgabe bis zum **21. Mai 2007** in der Vorlesung oder im Tutorium.
Falls Sie eine Bearbeitung abgeben möchten, geben Sie bitte den Namen Ihres Tutors und Ihre Übungsgruppe an.