Universität Karlsruhe (TH)
Lehrstuhl Informatik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Dr. Thomas Worsch
Matthias Schulz

28. April 2008

Einführung in die Informatik

Lösungen zu Übungsblatt 2

– Graphen –

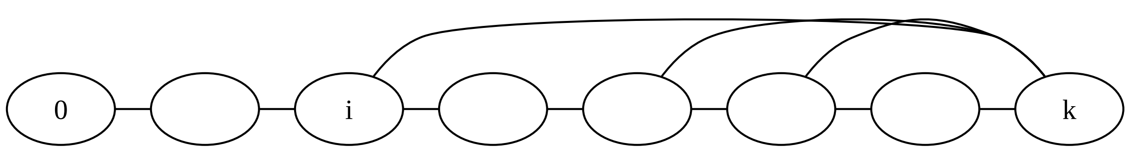
Aufgabe 1:

a) Zählt man für jeden Knoten $v \in V$ die Anzahl der Kanten e, die v als Endpunkt haben, so zählt man jede Kante zweimal, einmal für jeden der Endknoten. Man erhält also in der Summe eine gerade Zahl, das heißt, die Summer aller Knotengrade ist gerade.

   (Mathematisch: Addiert man die Grade aller Ecken, so ergibt sich die Summe
   $\sum_{v \in V} |\{\{x, y\} \in E : v \in \{x, y\}\}| =$
   $\sum_{v \in V} \sum_{e \in E: v \in e} 1 =$
   $\sum_{e \in E} \sum_{v \in V: v \in e} 1 =$
   $\sum_{e \in E} 2 = 2 \cdot |E|$.)

   Angenommen, die Anzahl der Ecken in V, die ungeraden Knotengrad haben, ist ungerade; dann wäre auch die Summe über alle Knotengrade ungerade, was im Widerspruch zur obigen Gleichung steht. Daher muss die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad gerade sein.

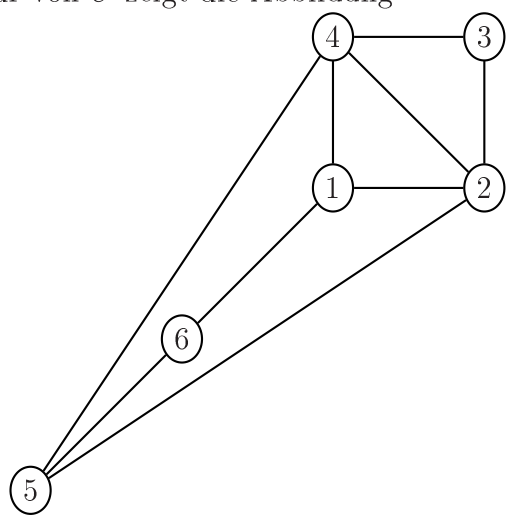
b) Sei $W = (e_1, \ldots, e_k)$ ein längster u-Weg in U und $X = (x_0, \ldots, x_k)$ die Knoten der Knotenfolge, die W entspricht.



   1) Alle Nachbarn von x_k sowie x_k selbst sind in X enthalten; anderenfalls gäbe es einen längeren Weg als W, indem man x_k mit einem Nachbarn verbindet, der nicht in X enthalten ist. X enthält somit mindestens $d(x_k) + 1$ Knoten. Daraus folgt: $k \geq d(x_k) \geq \delta(U)$.

   2) Sei $i < k$ minimal mit $\{x_i, x_k\} \in E$. Dann ist $x_i \ldots x_k x_i$ die Knotenfolge eines Kreises, der mindestens die Länge $\delta(U) + 1$ hat, da er alle Nachbarn von x_k und x_k enthält. □

Aufgabe 2: Die Struktur von U zeigt die Abbildung



U ist zusammenhängend, da jeder Knoten von jedem anderen erreichbar ist. U ist auch planar. U ist nicht bipartit:
Sei $G_U = (V_G, E_G)$ der zu U gehörende gerichtete Graph. Angenommen, es gibt eine Teilmenge $V' \subseteq V_G$, so dass $E_G \cap V' \times V' = E_G \cap (V_G \setminus V') \times (V_G \setminus V') = \emptyset$ gilt. Der Knoten 3 liege ohne Beschränkung der Allgemeinheit in V'. Dann müssten sowohl 2 als auch 4 in $V_G \setminus V'$ gehören, da ansonsten $(3, 2)$ beziehungsweise $(3, 4)$ in $E_G \cap V' \times V'$ liegen würde. Dann liegt aber $(2, 4)$ in $E_G \cap (V_G \setminus V') \times (V_G \setminus V')$, was nach Definition verboten ist.
Somit ist U nicht bipartit.

Aufgabe 3:

a) Sei $U = (V, E)$ ein ungerichteter schlingenfreier Graph und $G_U = (V, E_G)$ der zugehörige gerichtete Graph.

   ($\Rightarrow$) Sei U bipartit. Dann gibt es eine Teilmenge $V' \subseteq V$, so dass $E_G \cap V' \times V' = E_G \cap (V \setminus V') \times (V \setminus V') = \emptyset$ gilt.

   Sei nun $V_1 = V'$ und $V_2 = V \setminus V'$.

   Gäbe es Knoten $u, v \in V_1$ für die $\{u, v\} \in E$ gilt, so würde (u, v) in $E_G \cap V \times V$ liegen, was nach Definition ausgeschlossen ist.

   Analog kann es auch keine Knoten $u, v \in V_2$ geben für die $\{u, v\} \in E$ gilt.

   Somit folgt: Wenn U bipartit ist, gibt es zwei Teilmengen V_1 und V_2 von V, so dass gilt:

   $V_1 \cup V_2 = V$, $\forall u, v \in V_1 : \{u, v\} \notin E$ und $\forall u, v \in V_2 : \{u, v\} \notin E$.

($\Leftarrow$) Sei $U = (V, E)$ nicht bipartit; dann gibt es keine Teilmenge $V' \subseteq V$ so dass $V' \times V' \cap E_G = (V \setminus V') \times (V \setminus V') \cap E_G = \emptyset$ gilt.

Angenommen, es gibt zwei Mengen V_1, V_2 wie in der Aufgabe beschrieben. Da $V_1 \cup V_2 = V$ gilt, muss auch $V \setminus V_1 \subseteq V_2$ gelten:

Angenommen, ein Knoten v aus $V \setminus V_1$ ist nicht in V_2 enthalten; dann ist v weder in V_1 noch V_2 entahlten, und somit gilt $v \notin V_1 \cup V_2$. Dies ist ein Widerspruch zu $V_1 \cup V_2 = V$.

Somit würde es keine Kanten innerhalb V_1 und keine Kanten innerhalb $V \setminus V_1$ geben, es gilt also $E_G \cap V_1 \times V_1 = E_G \cap (V \setminus V_1) \times (V \setminus V_1) = \emptyset$.

Dies widerspricht aber der Annahme, dass U nicht bipartit ist.

Somit ist die Behauptung bewiesen.

b) Angenommen, es gibt verschiede Zerlegungen (V_1, V_2) und (V_1', V_2') von V die die Eigenschaften in der Aufgabe erfüllen. Sei $v \in V$ ein beliebiger Knoten; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $v \in V_1$ und $v \in V_1'$ enthalten.

Angenommen, es existiert ein Knoten $u \in V_1 \setminus V_1'$.

Dann gibt es einen Pfad $v = v_0, \ldots, v_k = u$ von v nach u.

Wir zeigen: Alle Knoten v_i mit geradem i liegen in V_1 und alle Knoten v_i mit ungeradem i liegen in V_2.

$i = 0$: $v_0 \in V_1$ nach Konstruktion.

$i \to i + 1$: Wenn i (un)gerade ist, liegt v_i in $V_1(V_2)$ und somit kann v_{i+1} nicht in $V_1(V_2)$ liegen, sondern muss in $V_2(V_1)$ liegen.

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Ebenso lässt sich zeigen, dass alle Knoten v_i mit geradem i in V_1' liegen und alle Knoten v_i mit ungeradem i in V_2' liegen.

Da $u \notin V_1'$ gilt, folgt, dass k ungerade sein muss; da $u \in V_1$ gilt, muss k gerade sein.

Somit kann ein solches u nicht existieren, und

$V_1 \setminus V_1' = \emptyset$.

Ebenso gilt $V_1' \setminus V_1 = \emptyset$, und damit folgt $V_1 = V_1'$.

Ebenso lässt sich $V_2 = V_2'$ zeigen.

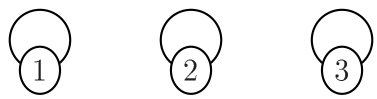
Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt.

c) Der Graph $U = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und $E = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ ist bipartit.

Sowohl die Teilmengen V_1, V_2 mit $V_1 = \{1, 3\}$ und $V_2 = \{2, 4\}$ als auch die Teilmengen V_1', V_2' mit $V_1' = \{1, 4\}$ und $V_2' = \{2, 3\}$ erfüllen die Eigenschaften aus Aufgabenteil b).

Aufgabe 4:

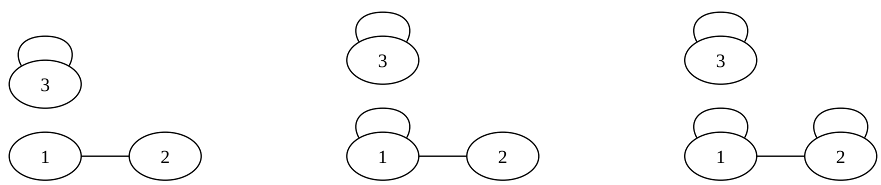
a) Der Graph



hat die gesuchte Wegematrix.

b) Kein Graph hat diese Wegematrix: In einem solchen Graph gäbe es zwar Wege von 2 nach 3 und von 3 nach 2 aber nicht von 2 nach 2. Widerspruch!

c) Die Graphen



haben alle die gesuchte Wegematrix.

d) Kein Graph hat diese Wegematrix: In einem solchen Graph gäbe es zwar Wege von 1 nach 3 und von 3 nach 1 aber nicht von 3 nach 3. Widerspruch!