Universität Karlsruhe (TH)
Lehrstuhl Informatik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Dr. Thomas Worsch
Matthias Schulz

23. April 2008

Einführung in die Informatik

Lösungen zu Übungsblatt 1

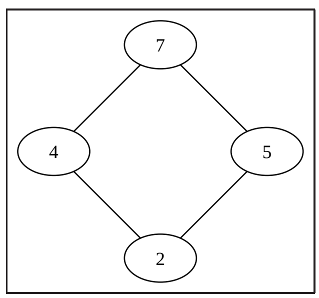
Aufgabe 1:

a) Nur der Graph A ist ein Baum. Die anderen beiden sind nicht kreisfrei (siehe b.), Bäume sind jedoch nach Definition zusammenhängend und kreisfrei.

b) Nur B und C enthalten u-Kreise. A ist Baum und also kreisfrei. Im Graphen B ist

$$\left(\left\{2,5,7,4\right\},\left\{\{2,5\},\{5,7\},\{7,4\},\{4,2\}\right\}\right)$$

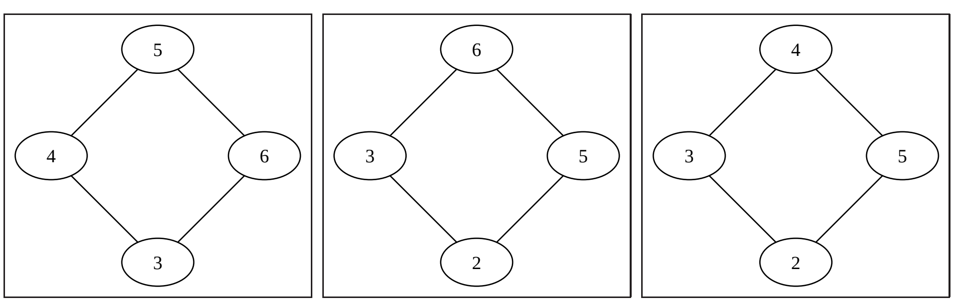
der einzige u-Kreis. Der sieht so aus

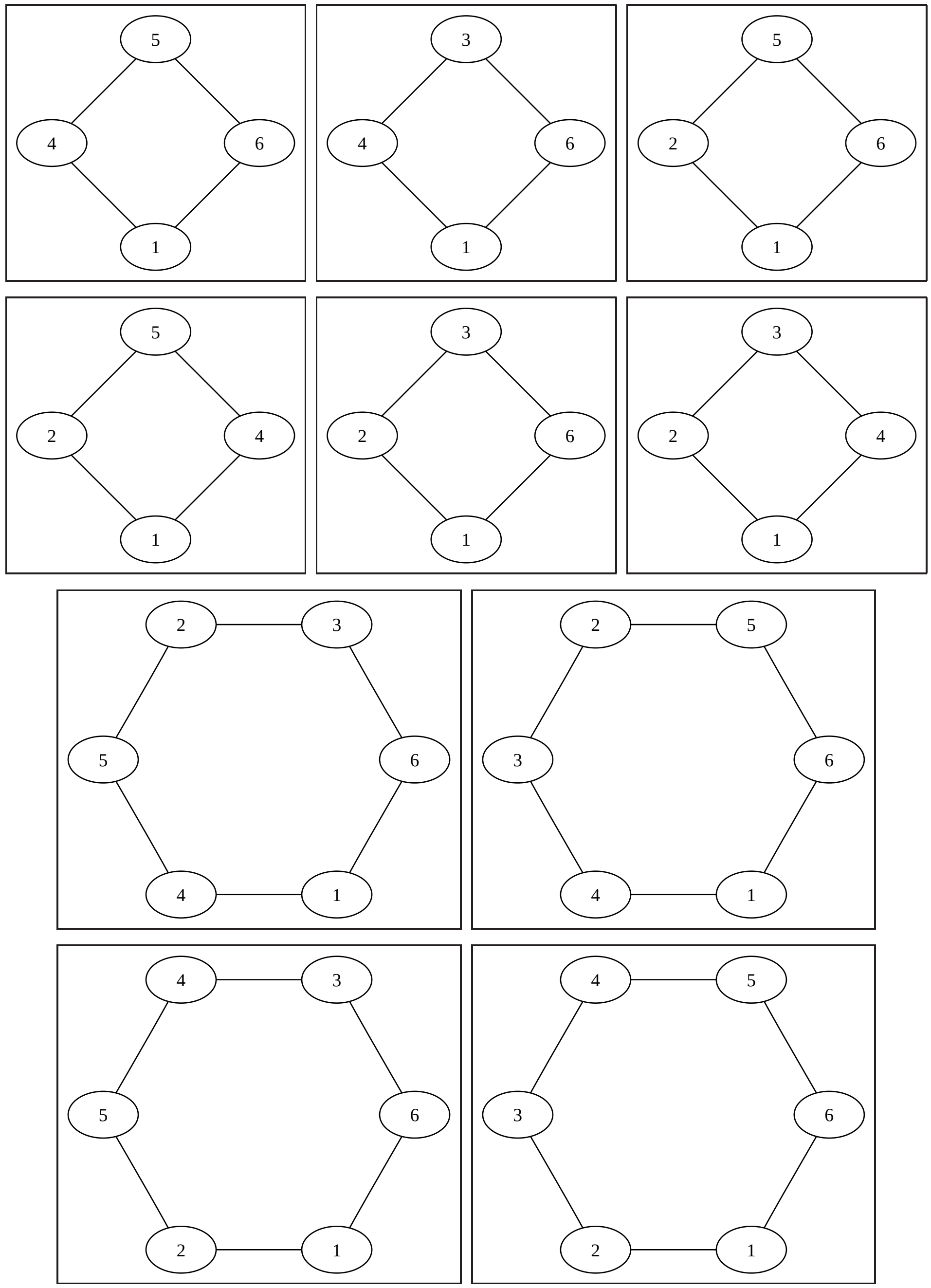


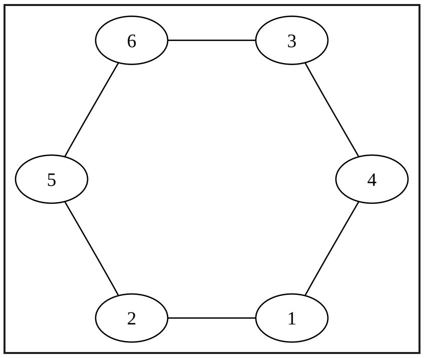
Im Graphen C stellt z. B.

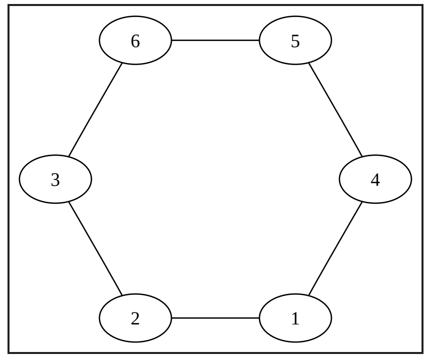
$$\left(\left\{2,3,6,5\right\},\left\{\{2,3\},\{3,6\},\{6,5\},\{5,2\}\right\}\right)$$

einen u-Kreis dar. Dieser Graph hat insgesamt 15 verschiedene u-Kreise:




5 4 6 1
3 4 6 1
5 2 6 1
5 2 4 1
3 2 6 1
3 2 4 1
2 3 5 6 4 1
2 5 3 6 4 1
4 3 5 6 2 1
4 5 3 6 2 1





c) Bei A kann ein solcher Weg nicht gefunden werden.

Begründung: Angenommen, man beginnt bei Knoten 9 und geht dann zu irgendeinem anderen Knoten. Der nächste Schritt führt auf jeden Fall wieder zu Knoten 9. Dieser würde dann zum zweiten Mal besucht werden.

Angenommen, man beginnt bei einem der Randknoten. Ohne Einschränkung sei dies Knoten 1. Dann kommt man im zweiten Schritt immer zu Knoten 9, dann zu einem Knoten mit Nummer $\neq 1$ und $\neq 9$ und schließlich wieder zu Knoten 9.

Ein Weg ist als eine Folge von Kanten definiert. Für den Graphen B gibt es genau die beiden Wege:

$$\begin{aligned} w_1 &= (\{1,3\}, \{1,2\}, \{2,5\}, \{5,7\}, \{4,7\}, \{4,6\}) \text{ und} \\ w_2 &= (\{4,6\}, \{4,7\}, \{5,7\}, \{2,5\}, \{1,2\}, \{1,3\}). \end{aligned}$$

Wird versucht, einen Weg zu konstruieren, der mit irgend einer anderen Kante als $\{1,3\}$ bzw. $\{4,6\}$ beginnt, dann zerfällt der Graph irgendwann in 2 Teile. Zum Beispiel könnte versucht werden mit der Kante $\{4,7\}$ zu beginnen. Dann könnten die Kanten $\{5,7\}$ und $\{2,5\}$ folgen. Nun kann weder Kante $\{2,4\}$ noch Kante $\{2,1\}$ als nächste Kante in den Weg aufgenommen werden, da sonst entweder Knoten 6 oder Knoten 3 nur durch erneutes Benutzen einer Kante erreicht werden können. Das ist aber nicht erlaubt, da jeder Knoten genau einmal besucht werden soll.

Häufig ist es sinnvoll und übersichtlicher, anstelle der Kantenfolge eines Weges, die Folge der besuchten Knoten anzugeben. Für die beiden Wege w_1 und w_2 lauten diese Folgen: $(3,1,2,5,7,4,6)$ und $(6,4,7,5,2,1,3)$.

Der Graph C hat insgesamt 72 verschiedene solcher Wege. Ein einfaches Beispiel ist $(1,2,3,4,5,6)$.

Ein Weg, auf dem jeder Knoten genau einmal besucht wird, heißt *Hamiltonscher Weg*. Die Anzahl solcher Wege ist stets gerade, da ein Hamiltonscher Weg rückwärts ebenfalls Hamiltonscher Weg ist.

Aufgabe 2: Ein *gerichteter* Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, falls es zwei Mengen V_1 und V_2 gibt, so dass $V = V_1 \cup V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ gilt und für jede Kante $\langle u, v \rangle \in E$ entweder u oder v in V_1 liegt (man beachte das "entweder"!). Ein *ungerichteter* Graph G heißt bipartit, falls G_U bipartit ist.
Um diese Bedingungen zu erfüllen, muss V_1 eine Teilmenge von V sein und $V_2 = V \setminus V_1$ und gelten. Also genügt die Angabe der Menge V_1 (bzw. V_2), und genau danach war in der Aufgabe gefragt.

- Bei Graph A kann man V_G wie folgt aufteilen:

$$V_G = V_1 \cup V_2 \quad \text{mit } V_1 = \{9\},\ V_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

- Im Graphen B gilt

$$V_G = V_1 \cup V_2 \quad \text{mit } V_1 = \{1, 4, 5\},\ V_2 = \{2, 3, 6, 7\}.$$

- Die Knoten des Graphen C können als

$$V_G = V_1 \cup V_2 \quad \text{mit } V_1 = \{1, 3, 5\},\ V_2 = \{2, 4, 6\}$$

  geschrieben werden.

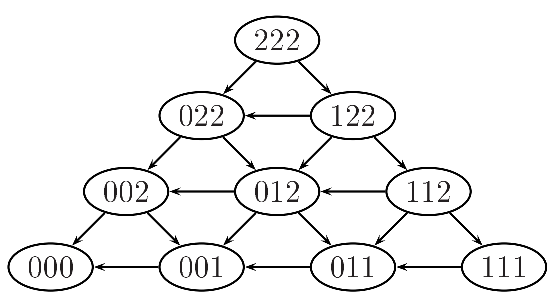
Es ist jeweils $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und für $i = 1, 2$ gilt

$$E_G \cap (V_i \times V_i) = \emptyset.$$

Aufgabe 3:

a) Wir stellen eine Konfiguration, in der ein Haufen n und der andere Haufen m Münzen erhält als nm dar; auf die Reihenfolge der Zahlen kommt es nicht an, von daher werden sie nach rechts hin aufsteigend geordnet. Diese Darstellungen der Konfigurationen sind die Knoten unseres Graphen.

   Zwischen zwei Knoten besteht genau dann eine Kante, wenn einer der Knoten von dem anderen durch einen Spielzug erreichbar ist.



b) Der erste Spieler kann gewinnen, wenn er einen der Stapel mit zwei Münzen vollständig an sich nimmt. Falls der zweite Spieler nun von einem Haufen zwei Münzen entfernt, kann der erste Spieler den letzten Haufen nehmen und hat gewonnen. Nimmt der zweite Spieler eine Münze von einem Haufen, kann der erste Spieler eine Münze von dem anderen verbliebenen Haufen nehmen; nun enthalten beide noch vorhandenen Haufen jeweils eine Münze. Der zweite Spieler muss nun einen der Haufen (bestehend aus einer Münze) nehmen, der erste Spieler kann nun den letzten Haufen nehmen und hat wiederum gewonnen. Wenn der erste Spieler optimal spielt, kann er somit stets gewinnen, und der zweite Spieler kann den Sieg nicht erzwingen.

c) Liegen 2 gleichgroße Haufen auf dem Tisch, dann gibt es eine Gewinnstrategie für Nachziehende: Zunächst können für $n = 0$ Anziehende keine Münze nehmen und also gewinnen Nachziehende. Wenn $n > 0$ ist, werden Anziehende die Situation (n, n) in die Situation (n, m) mit $0 \leq m < n$ überführen (müssen). Nachziehende ziehen nun auf (m, m) und per Induktion folgt der Sieg der Nachziehenden.

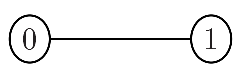
   Die Nachziehenden kopieren einfach den Zug der Anziehenden in einem Stapel in dem anderen Stapel.

   Bei 3 Haufen, von denen zwei gleich groß sind, gibt es eine Gewinnstrategie für Anziehende: Überführe die Situation (n, n, m) in die Situation $(n, n, 0)$, sei in dieser Situation nachziehend und gewinne mit der Kopierstrategie!

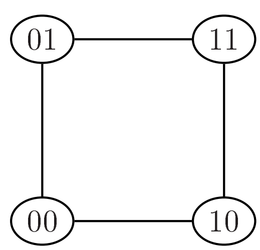
   Im Allgemeinen kann sehr leicht ermittelt werden, ob An- oder Nachziehende gewinnen: Sei die Situation $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ gegeben. Berechne $g = n_1 \oplus n_2 \oplus \ldots \oplus n_k$, wobei $\oplus$ die Operation XOR (bitweises entweder/oder auf der Binärdarstellung der Zahlen) bezeichnet. Nun gilt: Es gibt eine Gewinnstrategie für Nachziehende genau dann, wenn $g = 0$ ist. Der Wert g heisst *Grundywert* und spielt in der kombinatorischen Spieltheorie eine zentrale Rolle.

Aufgabe 4:

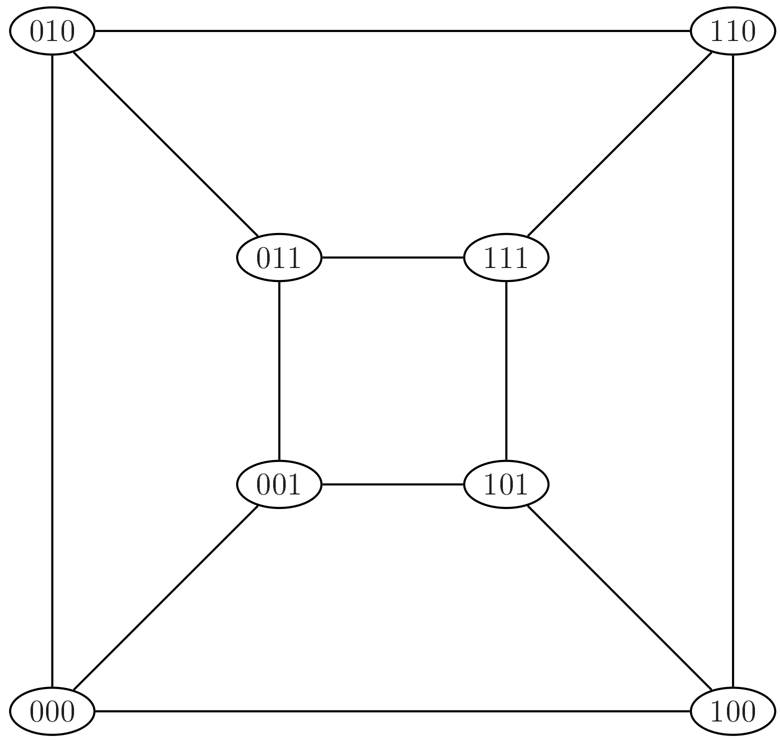
a) Die einfachsten Darstellungen der Graphen G_1, G_2 und G_3 sind



$\mathbf{G_1}$



$\mathbf{G_2}$



$\mathbf{G_3}$

b) Ein u-Weg an, der jeden Knoten von G_3 genau einmal berührt, ist zum Beispiel $000, 001, 101, 100, 110, 111, 011, 010$. Insgesamt hat G_3 144 verschiedene u-Wege, die jeden Knoten genau einmal berühren.

c) Als Index für v in der Adjazenzmatrix verwenden wir diejenige Dezimalzahl, die der Darstellung von v (als Binärzahl interpretiert) entspricht. Beispielsweise ordnen wir dem Knoten 101 die Nummer 5 zu. Dann sieht die Adjazenzmatrix von G_3 so aus:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Die Anzahl der Einsen O_n in der Adjazenzmatrix von G_n ist, da der Graph ungerichtet ist, $2|E_n|$, wobei E_n die Anzahl der Kanten in G_n sei.

Nun zeigen wir, dass für $n \geq 1$ $V_n = 2^n$ und $|E_n| = 2^{n-1} \cdot n$ gilt. Dies weisen wir mit einem Induktionsbeweis nach:

Induktionsanfang: $n = 1$: Es gilt $|E_1| = 1 = 1 \cdot 2^{1-1}$ und $|V_1| = 2^1$.

Induktionsannahme: Für ein festes $n \geq 1$ gilt $|V_n| = 2^n$ und $|E_n| = n \cdot 2^{n-1}$.

Induktionsschritt: Dann gilt auch $V_{n+1} = 2^{n+1}$ und $|E_{n+1}| = (n+1) \cdot 2^n$, denn $V_{n+1} = V_n \cdot 2 = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ und $|E_{n+1}| = 2^n + |E_n| + |E_n|$. (Man zähle die Elemnte der drei disjunkten Mengen, deren Vereinigung E_{n+1} ist.)

Damit folgt nach Induktionsannahme $|E_{n+1}| = 2^n + 2(n \cdot 2^{n-1}) = 2^n + n \cdot 2^n = (n+1) \cdot 2^n$.

Somit gilt $|E_n| = n \cdot 2^{n-1}$ für alle $n \geq 1$ und damit $O_n = n \cdot 2^n$.

d) Wir zeigen die Behauptung per Induktion:

Induktionsanfang: $n = 1$: Die einzigen Knoten sind 0 und 1, zwischen denen eine Kante verläuft; die einzige Kante verläuft somit zwischen den beiden Knoten, die sich in genau einer Stelle (der einzigen) unterscheiden.

Induktionsannahme: Für ein festes $n \geq 1$ gilt die Behauptung, dass Kanten genau zwischen den Knoten bestehen, die sich in genau einer Stelle unterscheiden.

Induktionsschritt: Dann gilt diese Behauptung auch für $n + 1$, denn:

1. Seien u und v zwei Knoten von G_{n+1}, zwischen denen eine Kante verläuft. Dann sind entweder die ersten n Zeichen von u und v identisch und die Knoten unterscheiden sich nur in ihrer letzten Stelle, oder das letzte Zeichen ist gleich und zwischen den Knoten, die durch die ersten n Zeichen von u und v beschrieben werden, verläuft eine Kante in G_n; nach Induktionsannahme unterscheiden sich die ersten n Zeichen dann in genau einer Stelle. Bei beiden Möglichkeiten unterscheiden sich die Knoten also in genau einer Stelle, wie behauptet.

2. Seien u und v zwei Knoten von G_{n+1}, die sich in genau einer Stelle unterscheiden. Falls diese Stelle die letzte Stelle ist, liegt die Kante $\{u, v\}$ in der ersten Teilmenge, deren Vereinigung E_{n+1} ergibt; falls diese Stelle nicht die letzte ist, sind einerseits die letzten Zeichen von u und v gleich, andererseits unterscheiden sich die ersten n Stellen von u und v nur in einer Stelle.

Nach Induktionsannahme bedeutet dies, dass die Knoten, die durch diue ersten n Zeichen beschrieben werden, durch eine Kante in G_n verbunden werden, und damit gilt auch in diesem Fall $\{u, v\} \in E_{n+1}$.

Damit ist die Behauptung gezeigt.